

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مقدمه‌ای بر نظریه بازی‌ها

گردآوری و ترجمه:

دکتر صلاح ابراهیمی - دکتر یاور دشتبانی

تقدیم به : پدران و مادرانمان

فهرست مطالب

| | |
|----|---|
| ۱۱ | فصل اول: مقدمه |
| ۱۳ | هدف و وظیفه نظریه بازی |
| ۱۵ | کاربردهای نظریه بازی |
| ۱۷ | مثال معمای زندانی‌ها |
| ۲۱ | اصطلاحات نظریه بازی |
| ۲۱ | ترجیحات |
| ۲۲ | استراتژی‌ها |
| ۲۳ | بازدهی یا نتایج حاصل از بازی |
| ۲۵ | فصل دوم: بازی‌های همزمان |
| ۲۵ | اصول |
| ۲۶ | استراتژی‌ها |
| ۲۶ | استراتژی ماکسی‌مین |
| ۲۸ | استراتژی غالب |
| ۳۰ | استراتژی مغلوب |
| ۳۳ | تعادل‌ها در استراتژی‌های خالص |
| ۳۳ | پاسخ‌های بهینه |
| ۳۶ | تعادل‌های نش |
| ۳۹ | تعادل محض (اکید) |
| ۴۰ | تعادل‌های نش و پاسخ‌های بهینه |
| ۴۱ | تعادل‌ها در استراتژی‌های ترکیبی |
| ۴۱ | استراتژی‌های ترکیبی و بازده مورد انتظار |
| ۴۴ | تعادل‌های ترکیبی نش |
| ۵۱ | شکل‌های خاص برای بازی‌ها |
| ۵۱ | بازی‌های عادلانه |
| ۵۱ | بازی‌های مجموع صفر |

| | |
|----|--|
| ۵۲ | بازی‌های همزمان در اقتصاد |
| ۵۲ | بازی ورود به بازار |
| ۵۴ | توافقات بازار (بازی اوپک) |
| ۵۵ | اقتصاد منابع |
| ۵۶ | بازی‌های سه نفره |
| ۶۱ | فصل سوم: بازی‌های متوالی و پی در پی |
| ۶۱ | اصول |
| ۶۳ | اصطلاحات |
| ۶۵ | زیر بازی‌ها و تعادل‌های کامل در زیربازی‌ها |
| ۷۰ | مزیت اولین حرکت (FMA) |
| ۷۲ | یک مثال: بحران کوبا |
| ۷۷ | فصل چهارم: چانه‌زنی (بازی‌های همکارانه) |
| ۷۷ | اصول |
| ۷۸ | تبانی |
| ۷۸ | تابع خصوصیت |
| ۸۱ | بازی کیک |
| ۸۲ | چانه‌زنی بین دو بازیکن |
| ۸۷ | فصل پنجم: تصمیم‌گیری در شرایط نااطمینانی |
| ۸۹ | نااطمینانی در مدل‌سازی |
| ۹۰ | تابع مطلوبیت $u(x)$ |
| ۹۲ | مطلوبیت مورد انتظار |
| ۹۳ | استثنائات در نظریه بازی |
| ۹۳ | اصول |
| ۹۳ | بازی تحت شرایط نااطمینانی: تناقض السبرگ |
| ۹۴ | بازی‌های بدون نااطمینانی |
| ۹۴ | بازی اولتیماتوم |
| ۹۵ | بازی دیکتاتور |

| | |
|-----|--|
| ۹۵ | بازی مبادله هدیه..... |
| ۹۷ | تعاریف: عدالت ، مجازات، اعتماد و پاداش |
| ۱۰۰ | فصل ششم: موضوعات پیشرفته در نظریه بازی..... |
| ۱۰۱ | مقدمه: |
| ۱۰۵ | مفاهیم راهحل: |
| ۱۰۷ | تعادل نش: |
| ۱۰۸ | تعریف (تعادل نش در استراتژیهای خالص):..... |
| ۱۱۲ | استراتژیهای غالب |
| ۱۱۲ | بازیهای تکراری..... |
| ۱۱۷ | اصلاحات تعادل نش: |
| ۱۱۸ | حذف استراتژیهای غالب:..... |
| ۱۲۸ | بازیهای تکراری و تکمیل بازی فرعی: |
| ۱۲۹ | بازیهای با اطلاعات ناقص: |
| ۱۳۴ | بحث تعادل نش بیژ: |
| ۱۳۶ | فهرست منابع..... |

مقدمه

نظریه بازی حوزه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در بستر علم اقتصاد توسعه یافته است و به مطالعه رفتار راهبردی بین عوامل عقلانی می‌پردازد. رفتار راهبردی، زمانی بروز می‌کند که مطلوبیت هر عامل، نه فقط به راهبرد انتخاب شده توسط خود وی بلکه به راهبرد انتخاب شده توسط بازیگران دیگر همبستگی داشته باشد. نظریه بازی طی سال‌ها گسترش و عمق زیادی در رشته‌های مختلف و به ویژه اقتصاد داشته است. کتاب حاضر با دیدی کلی نسبت به مفاهیم و اصطلاحات اساسی نظریه بازی، نگاشته شده و قابل استفاده برای دانشجویان کارشناسی در رشته‌های اقتصاد، مدیریت و حسابداری است. در این کتاب مروری کلی بر نظریه بازی را است. این کتاب بیشتر از هر چیز بر ترویج شناخت اساسی مکانیزم و روش‌های حل مسائل نظریه بازی در مدت زمانی کوتاه تمرکز دارد و مطلب آن به گونه‌ای است که خوانندگانی که دانش قبلی در این زمینه ندارند، کاملاً قابل استفاده است. از آنجا که نظریه بازی از نظم ریاضی بسیار بالایی برخوردار است و در میان پژوهشگران تقاضای بسیار بالایی دارد ادعا نمی‌شود. معمولاً، مفاهیم مربوط به مسائل نظریه بازی از نظر ریاضی برای افرادی که با این زمینه آشنایی لازم را ندارند، بسیار پیچیده و گاهی غیرقابل درک است. اما تا زمانی که مطالب در سطوح مقدماتی تدوین شود، بسیاری از اصول موجود در نظریه بازی را می‌توان به گونه‌ای منطقی با استفاده از ابزارهای نسبتاً ساده توضیح داد. به همین دلیل، این کتاب مشخصاً و به صورت برجسته یک متن مقدماتی در زمینه نظریه بازی است، به طوری که خواننده علاقه‌مند می‌تواند با استفاده از آن دانش پایه‌ای خود را در این زمینه مستحکم کند و سپس با قدرت بیشتری دامنه مطالعه خود را از طریق جستجو در ادبیات پیشرفته‌تر گسترش دهد. اما مزایای خواندن این کتاب چیست؟ مزایای مطالعه این کتاب فهم دقیق مفاهیم و درک

راه‌حل‌های مربوط است. زیرا فهم اساسی و عمیق مفاهیم نظریه بازی و درک راه‌حل‌های ارائه شده برای مسائل آن، می‌تواند نقش به‌سزایی در تمامی جنبه‌های زندگی داشته باشد. بی دلیل نیست که علاوه بر علم اقتصاد، نظریه بازی در بسیاری از علوم، مانند جامعه‌شناسی، سیاست، حقوق و زیست‌شناسی کاربرد گسترده و فراوانی پیدا کرده است. این کتاب در چند فصل تنظیم شده است. در فصل اول پیشگفتاری در زمینه نظریه بازی و اهمیت آن بیان می‌شود و تعاریف، مفاهیم و اهداف نظریه بازی بررسی می‌شود. همچنین کاربردها و اصطلاحات مورد نیاز برای فصل‌های بعد نیز در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل دوم که در زمینه بازی‌های همزمان است، استراتژی‌های بازی همزمان بررسی و تحلیل می‌شود. در این فصل تعادل نش و اشکال مختلف آن همراه با مثال‌های عینی نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل سوم نیز که در ارتباط با بازی‌های متوالی و پی در پی است، برخلاف فصل سه، بازی به صورت همزمان انجام نمی‌گیرد، بلکه به صورت متوالی است. بحث «زیر بازی» نیز در همین فصل به صورت تفصیلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل چهارم کتاب، بحث بازی‌های همکارانه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل پنجم بحث نااطمینانی و تصمیم‌گیری در شرایط نااطمینانی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برخی از استثنائات نظریه بازی نیز در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل هفتم نیز موضوعات پیشرفته در نظریه بازی همراه با مثال‌هایی اقتصادی مورد بحث قرار خواهد گرفت.

از تمامی خوانندگان گرامی خواهش‌مندیم که ما را از راهنمایی‌ها و نظرات سازنده خود بی‌نصیب نکنند و ما را در انتشار نوشتاری صحیح و مؤثر یاری رسانند. برای ارتباط با نویسندگان کتاب با پست الکترونیک Ebs1365@gmail.com و Yavar_Dashtbany@yahoo.com مکاتبه فرمایید.

امید است به یاری خداوند متعال، این کتاب زمینه را برای رشد استعدادها و تقویت توانمندی‌های خوانندگان علاقه‌مند به نظریه بازی‌ها فراهم کند.

فصل اول

~~مقدمه~~

هدف و وظیفه نظریه بازی

نظریه بازی^۱ مطالعه مدل‌های ریاضی و تعاملات استراتژیک بین عوامل منطقی است. نظریه بازی در تمام زمینه‌های علوم اجتماعی و همچنین در منطق، علوم سیستم و علوم کامپیوتر کاربرد دارد. این نظریه در اصل، به بازی‌های دو نفره با مجموع صفر می‌پردازد که در آن سود یا زیان هر شرکت‌کننده دقیقاً با سایر شرکت‌کنندگان متعادل می‌شود. در قرن بیست و یکم، نظریه بازی در طیف وسیعی از روابط رفتاری کاربرد دارد. نظریه بازی‌های مدرن با ایده تعادل‌های استراتژی مختلط در بازی دو نفره حاصل جمع صفر و اثبات آن توسط جان فون نیومن^۲ آغاز شد. اثبات اصلی فون نیومن از قضیه نقطه ثابت بروور در نگاشت‌های پیوسته در مجموعه‌های محدب فشرده استفاده کرد که به روشی استاندارد در نظریه بازی‌ها و اقتصاد ریاضی تبدیل شد. پس از مقاله او، کتاب نظریه بازی‌ها و رفتار اقتصادی در سال ۱۹۴۴ که با همکاری اسکار مورگنسترن^۳ نوشته شد، بازی‌های مشارکتی چندبازیکن را در نظر گرفت. ویرایش دوم این کتاب یک نظریه بدیهی از مطلوبیت مورد انتظار را ارائه کرد که به آماردانان و اقتصاددانان ریاضی اجازه داد تا تصمیم‌گیری را تحت عدم قطعیت قرار دهند. نظریه بازی‌ها به طور گسترده در دهه ۱۹۵۰ توسط بسیاری از محققان توسعه یافت. نظریه بازی به صراحت در دهه ۱۹۷۰ به سمت تکامل رفت، اگرچه پیشرفت‌های مشابه حداقل به دهه ۱۹۳۰ برمی‌گردد. نظریه بازی‌ها به طور گسترده به عنوان یک ابزار مهم در بسیاری از زمینه‌ها شناخته شده است. از سال ۲۰۲۰، با اهدای جایزه نوبل در علوم اقتصادی به نظریه‌پردازان تئوری بازی، به اهمیت این نظریه افزوده شد.

¹ Game Theory

² John Von Neumann

³ Oskar Morgenstern

نظریه بازی، گفتمانی ریاضی از نظریه اقتصادی است که به تجزیه و تحلیل شرایط تصمیم‌گیری در اموری می‌پردازد که حالت بازی (مانند حراج، شطرنج و پوکر) دارند و از نظر کاربردی دامنه آن بسیار فراتر از علم اقتصاد است. اهمیت نظریه بازی اندازه‌ای است که جایزه نوبل در سال ۱۹۹۴ به نظریه‌پردازان نظریه بازی، جان فوربز نش^۱، جان هارسانی^۲ و رینارد سلتن^۳ تعلق گرفت.

فضای تصمیم‌گیری معمولاً شامل چندین بازیکن است که بازیکنان باید از بین چندین استراتژی ممکن تصمیم‌گیری کنند که کدام یک از آن استراتژی را برگزینند. هر کدام از این انتخاب‌ها می‌تواند بر مطلوبیت کسب شده توسط این بازیکنان و نتیجه حاصل^۴ از انجام این بازی‌ها اثرگذار باشد. هدف اولیه در انجام این بازی‌ها شکست دادن افراد دیگر نیست، بلکه حداکثر کردن مطلوبیت (مورد انتظار) خود بازیکن است. بازی‌ها ضرورتاً به‌گونه‌ای طراحی نمی‌شوند که نتیجه آن‌ها پیروزی یک بازیکن، زیان الزامی بازیکنان رقیب باشد. این گونه بازی‌ها به طور ساده حالت‌های خاصی هستند که به عنوان بازی‌هایی با مجموع صفر شناخته می‌شوند. بنابراین نظریه بازی به تجزیه و تحلیل تمامی چارچوب‌ها و شرایط مربوط به یک بازی (تا آن‌جا که امکان‌پذیر باشد) می‌پردازد و تمامی استراتژی‌های ممکن برای انجام این بازی را در نظر می‌گیرد و دسته‌ای از استراتژی‌ها را ارایه می‌کند که مطلوبیت یک فرد یا نتایج حاصل از بازی را برای وی بهینه کند. نکته قطعی و مهم در نظریه بازی این است که در آن تنها در نظر گرفتن استراتژی خود فرد کافی نیست و باید به استراتژی رقبای نیز توجه کرد. یک بازیکن باید

1 John Forbes Nash

2 John Harsanyi

3 Reinard Selten

4 Payoff

پیش‌بینی کند که کدام یک از استراتژی‌ها برای حریف وی نیز بهینه است زیرا که انتخاب هر بازیکن دارای اثری مستقیم بر روی نتایج به‌دست آمده از بازی برای یک بازیکن دیگر است. بنابراین گفته می‌شود که در نظریه بازی بین بازیکنان اثرگذاری متقابل^۱ وجود دارد. در وضعیت ایده‌آل، در بازی تعادل‌های^۲ مختلفی وجود دارد؛ به‌عبارت دیگر استراتژی‌های بهینه بازیکنان با یکدیگر هماهنگی دارند و با ثبات هستند. البته این موضوع به‌صورت آشکار برای بازی‌های با مجموع صفر مانند بازی «سنگ، کاغذ، قیچی»، کاربرد ندارد، زیرا در آن هیچ مجموعه‌ای از استراتژی‌ها وجود ندارد که برای تمامی بازیکنان بهینه باشد.

در نظریه سنتی بازی، فرض می‌شود که تمامی بازیکنان به‌صورت عقلایی^۳ و مبنی بر اساس اصل خودخواهی^۴ عمل می‌کنند. بنابراین هر بازیکن تنها به دنبال آن است که مطلوبیت (مورد انتظار) خود را به حداکثر برساند. فصل آخر این کتاب نشان می‌دهد که این موضوع همیشه در واقعیت صادق نیست.

کاربردهای نظریه بازی

یک سری از کاربردهای متنوع برای نظریه بازی در زمینه‌های مختلف وجود دارد. نظریه بازی زمانی بسیار مهیج و جالب خواهد بود که در آن چارچوب شرایط موجود را بتوان به‌آسانی به‌صورت یک بازی مدل‌سازی کرد به‌گونه‌ای که در آن بازی، استراتژی‌ها و نتایج حاصل به‌خوبی قابل شناسایی بوده باشد و وابستگی روشنی میان نتایج به‌دست آمده از انتخاب یک استراتژی توسط هر بازیکن، وجود داشته باشد.

1 Reciprocal Influencing
 2 Equilibrium
 3 Rationally
 4 Egoistically

به‌عنوان مثال، در علم اقتصاد کاربردهای نظریه بازی را می‌توان در موضوعاتی مانند سیاست‌های قیمت و محصول، ورود به بازار، حراج و مزایده، سیستم‌های انگیزش درونی، پیمان‌های استراتژیک بین دولت‌ها، ادغام شرکت‌ها، تملک و اعمال کنترل بر شرکت‌ها به کار گرفت. در بخش حقوقی علم اقتصاد نیز کاربرد نظریه بازی در میان سایر نظریه‌ها، در محدوده‌هایی مانند طراحی قرارداد، حفاظت از ثبت اختراعات، عایدات ناشی از دلالتی و آربیتراژ برجسته و قابل توجه است.

علاوه بر این، نظریه بازی در سیاست (مانند ائتلاف‌ها، جنگ قدرت‌ها و گفت و گوها)، محیط زیست (مانند توسعه تجارت و اقتصاد منابع)، در جامعه‌شناسی، در جنگ و در علم زیست‌شناسی کاربردهای فراوانی دارد.

یک مثال کلاسیک از مدل‌سازی نظریه بازی در اقتصاد (که متأسفانه غیر کاربردی است)، حراج و مزایده مربوط به گواهینامه UMTS است که در سال ۲۰۰۰ در کشور آلمان صورت گرفت. این گواهینامه در میان شش خریدار توزیع شد که جمع کل مبلغ فروش آن به ۱۰۰ میلیون مارک می‌رسید. مبلغی که مقدار آن بسیار فراتر از حد انتظار بوده است. این قیمت بسیار بالا با توجه به اهمیت اقتصادی گواهینامه استاندارد UMTS، باعث علامت‌دهی به انتظارات بزرگ در این زمینه شد، زیرا هر شش خریدار، داوطلب خرید گواهینامه یکدیگر می‌شوند تا بتوانند سایر خریداران را به کناره‌گیری از رقابت وادار کنند. هر چند که در پایان هیچ یک از خریداران از فهرست خرید حذف نشدند، اما این مبلغ هنگفت برای خرید گواهینامه بدون هیچ مزیت اضافی باید پرداخت می‌شد. استفان نیمر^۱ با انتشار کتابی^۲ در سال ۲۰۰۲ نشان داد که در نظریه بازی نتایجی که از یک بازی به دست می‌آید همواره بر اساس تصمیم‌گیری عقلایی نیست. در مثال فوق اگر

1 Stefan Niemeier

2 Eine Spieltheoretische Analyse Die Deutsche

برخی از خریداران در چارچوب نظریه بازی تحلیل مناسبی از این بازی می‌داشتند، می‌توانستند پول کم‌تری برای این حراج بپردازند.

مثال معمای زندانی‌ها

شاید معروف‌ترین مسأله در نظریه بازی معمای زندانی‌ها^۱ باشد که در اینجا به‌طور خلاصه توضیح داده می‌شود. این کار می‌تواند یک درک مقدماتی از چگونگی مدل‌سازی بازی را فراهم کند. همچنین، در این بخش اصطلاحات مهم نظریه بازی که دانستن آنها برای یادگیری فصل‌های بعد لازم است، توضیح داده می‌شود.

معمای زندانی‌ها حکایت دو متهمی است که دستگیر شده‌اند. آنها مظنون به سرقت بانک هستند. با توجه به مدارک و شواهد اندک موجود می‌توان این دو متهم را تنها تا یک سال در زندان نگاه داشت. از این‌رو، با توجه به انگیزه‌های ارتکاب جرم، امکان اعتراف زندانی‌ها نااطمینانی^۲ در مورد نوع اعتراف هر کدام از آنها در زمان بازجویی، این دو زندانی به‌صورت جداگانه مورد بازجویی قرار می‌گیرند. به هر یک از این دو زندانی پیشنهاد می‌شود، که اگر به سرقت اعتراف کند آزاد می‌شود. به شرطی که زندانی دیگر از اعتراف به سرقت سرباز زند. اما در صورتی که به سرقت اعتراف نکند ولی زندانی دوم اعتراف کند، وی (زندانی اول) به ۱۰ سال زندان محکوم می‌شود. اگر هر دو زندانی به سرقت بانک اعتراف کنند، هر کدام از آنها به ۵ سال زندان محکوم می‌شوند. عباراتی که تاکنون در مورد این زندانیان بیان شد، این امکان را فراهم می‌کند که بتوان گزاره‌هایی را برای مدل‌سازی این بازی در چارچوب نظریه بازی ارائه کرد.

1 Prisoners dilemma

2 Uncertainty

دو زندانی در حقیقت دو بازیکن حاضر در این بازی هستند که دو استراتژی را در پیش‌روی خود دارند: اعتراف کنند؛ یا اینکه اعتراف نکنند. بازدهی متناظر با این بازی همان سال‌هایی است که آنها باید در زندان سپری کنند. البته باید توجه داشت که در اینجا، هدف ماکزیمم کردن بازدهی نیست، بلکه می‌نیمم کردن آن است. بازدهی حاصل از این بازی نه تنها به استراتژی انتخاب شده توسط یک زندانی بستگی دارد، بلکه به استراتژی انتخاب شده توسط زندانی دیگر نیز وابسته است. علاوه بر این، بسیار اهمیت دارد که دو زندانی به صورت همزمان تصمیم‌گیری کنند؛ و هر کدام از آنها در زمان تصمیم‌گیری از استراتژی فرد دیگر بی‌اطلاع باشد؛ و هر دو به خوبی از این موارد اطلاع دارند. این‌گونه بازی‌ها در نظریه بازی با عنوان بازی‌های همزمان تحت شرایط اطلاعات کامل شناخته می‌شوند. بازی‌های همزمان با نام بازی‌های با شکل عادی¹ نیز شناخته می‌شوند. در برابر بازی‌های همزمان بازی‌های متوالی و پی‌درپی² قرار دارند. در این نوع بازی‌ها «بازی کردن» به صورت متوالی و پی‌درپی انجام می‌شود. بازی‌های متوالی و پی‌درپی با نام بازی‌های گسترده³ نیز شناخته می‌شوند. و از آنجا که تنها دو نفر در این بازی شرکت می‌کنند، آن را یک بازی دو نفره یا یک بازی دو نفره عادی می‌نامند. با توجه به این اطلاعات، مدل زیر را می‌توان با استفاده از نظریه بازی برای زندانی‌ها طراحی کرد.

1 Normal form

2 Sequential games

3 Extensive form

| | | Prisoner2 | |
|-----------|----------------|------------|----------------|
| | | A: Confess | B: Not Confess |
| Prisoner1 | A: Confess | -5, -5 | -10, 0 |
| | B: Not confess | 0, -1 | -1, -10 |

شکل (۱-۱): معمای زندانی

در این ماتریس 2×2 استراتژی‌های پیش روی زندانی اول (Prisoner1) در سمت چپ جدول و استراتژی‌های پیش روی زندانی دوم (Prisoner2) در قسمت بالای جدول ارائه شده است. در این ماتریس چهار بخش متفاوت وجود دارد که برای هر کدام از آنها یک قسمت در ماتریس در نظر گرفته شده است:

۱. هر دو زندانی اعتراف کنند (قسمت بالا و سمت چپ جدول).

۲. زندانی اول اعتراف کند و زندانی دوم اعتراف نکند (قسمت بالا و سمت راست جدول).

۳. زندانی اول اعتراف نکند و زندانی دوم اعتراف کند (قسمت پایین و سمت چپ جدول).

۴. هیچ‌یک از دو زندانی اعتراف نکنند (قسمت پایین و سمت راست جدول).

۵. دو عدد موجود در هر یک از این چهار بخش در جدول، بیانگر بازدهی حاصل از بازی برای این دو زندانی است. بازدهی نوشته شده در پایین و سمت چپ هر یک از خانه‌ها متعلق به زندانی اول است، در حالی که مقادیر نوشته شده در بالا و سمت راست هر یک از خانه‌های ماتریس بازدهی زندانی دوم است.

البته مطالب زیادی بیشتری در مورد این نمادگذاری می‌توان مطرح کرد. اما مسأله مهم این است که چه چیزی در این بازی وجود داشته است که آن را به یکی از مشهورترین بازی‌ها در نظریه بازی تبدیل کرده است؟

پاسخ این سوال به نتایج متناقضی باز می‌گردد که این بازی می‌تواند در پی داشته باشد. به‌عنوان مثال، هر دو نفر می‌توانند اعتراف کنند و برای ۵ سال راهی زندان شوند؛ اما اگر هیچ یک از آنها درباره جرم خود چیزی نگویند، هر دو تنها برای یک سال مجازات زندان را تحمل خواهند کرد.

برای رسیدن به این نتایج به‌صورت دقیق‌تری به بررسی استراتژی‌های یک زندانی از دیدگاه زندانی دیگر می‌پردازیم. فرض کنید من زندانی اول هستم و همواره سعی می‌کنم، در قبال هر یک از دو استراتژی زندانی دیگر بهترین پاسخ را بدهم. در صورتی که زندانی دوم اعتراف کند، من نیز اعتراف خواهم کرد؛ زیرا در این حالت من نیز پنج سال به زندان خواهم رفت، حال آنکه اگر اعتراف نکنم، به ۱۰ سال زندان محکوم می‌شوم. اگر فرض کنم که زندانی دوم اعتراف نمی‌کند، من اعتراف می‌کنم، زیرا در این صورت آزاد خواهم شد. البته، اگر هر دو اعتراف نکنیم، به یک سال زندان محکوم می‌شوم که طبیعتاً ترجیح می‌دهم که هر دو انکار کنیم و یک سال به زندان بروم تا اینکه هر دو اعتراف کنیم و به پنج سال زندان محکوم شویم. این بدان معناست که من همیشه و حتی بدون توجه به اینکه زندانی دیگر کدام استراتژی را انتخاب کند، استراتژی «اعتراف کردن» را انتخاب می‌کنم. وضعیت مشابهی نیز برای زندانی دیگر وجود دارد. او نیز اعتراف خواهد کرد، در نتیجه هر دو اعتراف می‌کنند و هر یک به پنج سال زندان محکوم می‌شوند. البته، این تنها یک مثال نظری است. شاید بتوان این تعمیم را داد که جهان پر از معمای زندانی است؛ (به عنوان مثال مدیران و نمایندگان اتحادیه کارگری) زیرا بازیکنان می‌ترسند که تنها طرفی باشند که بدون گرفتن امتیاز از بازیکن طرف مقابل، امتیازی به وی دهند.

اصطلاحات نظریه بازی

ترجیحات

روابط بیانگر ترجیحات^۱ بازیکنان دارای اهمیت بسیار زیادی در نظریه بازی است. این روابط نشان می‌دهد که یک فرد کدام انتخاب‌ها را به انتخاب‌های دیگر ترجیح می‌دهد و نسبت به کدام انتخاب‌ها بی تفاوت^۲ است.

در صورتی که یک بازیکن استراتژی A را به استراتژی B ترجیح دهد، می‌نویسیم: $A > B$ ؛ و در صورتی که وی نسبت به هر دو استراتژی بی تفاوت باشد، می‌نویسیم، $A \sim B$. فرض کنید که بازیکن مورد نظر دارای سه انتخاب برای مسافرت است که با یکی از سه گزینه A (اتومبیل) B (اتوبوس) C (مترو برقی). با توجه به ترجیحات وی، گزاره‌های زیر را می‌توان نوشت:

۱. بازیکن ترجیح می‌دهد که به جای مسافرت با مترو با اتومبیل به سفر برود: $A > B$ یعنی بازیکن مورد نظر استراتژی A را به استراتژی B ترجیح می‌دهد.

۲. مسافرت کردن با اتوبوس یا مترو برای وی فرقی ندارد: $B \sim C$ یعنی این بازیکن نسبت به انتخاب B یا C بی تفاوت است.

با توجه به اصل انتقال پذیری^۳ ترجیحات از روابط ۱ و ۲ می‌توان نتیجه گرفت که $A > C$ است.

1 Preferences

2 Indifferent

3 Transitivity

استراتژی‌ها

استراتژی‌های این بازی در زیر با نام S آورده شده است. فرض کنید که استراتژی بازیکن اول S_1 و استراتژی بازیکن دوم S_2 باشد. در مثال معمای زندانی استراتژی انتخاب شده توسط بازیکن شماره ۱ به صورت زیر است:

اعتراف کردن $S_1 =$

و برای بازیکن شماره ۲ نیز این استراتژی به صورت زیر است:

اعتراف کردن $S_2 =$

و برای کل بازی این استراتژی‌ها را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$S = (S_1, S_2) =$ (اعتراف کردن، اعتراف کردن)

در این حالت S به عنوان یک زوج استراتژی در نظر گرفته می‌شود.

$S_1(S_2)$ را می‌توان به عنوان یک مجموعه از استراتژی‌های قابل انتخاب برای بازیکن اول (یا بازیکن دوم) به صورت مثال زیر در نظر گرفت.

$S_1 =$ (اعتراف نکردن، اعتراف کردن)

و برای کل بازی می‌توان نوشت:

$S = (S_1, S_2) =$ (اعتراف کردن، اعتراف نکردن) و (اعتراف نکردن، اعتراف کردن)

در صورتی که اقدامات یک بازیکن در بازی شامل تصمیم به عمل کردن به یکی از استراتژی‌های موجود باشد، در این حالت این استراتژی را یک استراتژی خالص^۱ می‌نامیم. البته به خود استراتژی‌های بازی استراتژی‌های خالص نیز گفته می‌شود. در

1 Pure Strategies

مقابل، اگر چند استراتژی خالص در برابر یک بازیکن وجود داشته باشند که هر کدام با یک مقدار احتمال مشخص بازی شوند، به آن استراتژی یک استراتژی ترکیبی^۱ گفته می‌شود.

یک مثال سستی که در آن بازیکنان دارای استراتژی ترکیبی هستند، بازی «سنگ، کاغذ، قیچی» است.

بازدهی یا نتایج حاصل از بازی

بازدهی (نتایج حاصل از بازی^۲) نشانگر منافع دریافت شده‌ای^۳ است که یک بازیکن در قبال انجام یک استراتژی مشخص به آن دست می‌یابد. از آنجا که بازدهی حاصل از یک بازی تنها به استراتژی خود آن بازیکن بستگی ندارد، بلکه به استراتژی تمامی بازیکنان وابسته است، بازدهی A تابعی از استراتژی‌های موجود برای همه بازیکنان حاضر در بازی است.

بنابراین در معمای زندانی بازده مورد انتظار برای بازیکن اول به صورت زیر است:

$$A_1(S) = A_1(S_1, S_2) = A_1\left(\left(\text{اعتراف کردن, اعتراف کردن}\right)\right) = -5$$

و برای بازیکن دوم در این معما بازدهی متناظر برای زوج استراتژی یکسان به صورت زیر است:

$$A_2(S) = A_2(S_1, S_2) = A_2\left(\left(\text{اعتراف کردن, اعتراف کردن}\right)\right) = -5$$

چنان‌که ملاحظه می‌شود، بازدهی حاصل از انجام یک استراتژی نه تنها به استراتژی خود بازیکن بستگی دارد، بلکه به استراتژی سایر بازیکنان نیز وابسته است.

1 Mixed Strategies

2 Payoffs

3 Pay out



فصل دوم

بازی‌های همزمان

اصول

همان‌طور که در مثال معمای زندانی نشان داده شد، در بازی‌های همزمان¹، تمامی بازیکنان تصمیمات خود را در یک لحظه و به صورت همزمان می‌گیرند، بدون اینکه بدانند که بازیکنان دیگر چه تصمیمی خواهند گرفت. اما اطلاعات مربوط به بازیکنان رقیب و استراتژی‌ها و بازدهی‌های آن‌ها، اطلاعاتی عمومی است که همه بازیکنان از آن اطلاع دارند (اطلاعات کامل). بخش‌هایی که در ادامه می‌آیند، به بررسی مختصر انواع مختلف استراتژی‌ها و تعادل‌ها در یک بازی همزمان دو نفری می‌پردازند. البته در ابتدا، تنها بازی‌های همزمان میان دو نفر مورد بررسی قرار می‌گردد. زیرا این بازی‌ها را می‌توان در قالب یک ماتریس دو بعدی و بازی‌های چند نفری (بازی‌های همزمان n نفره) مورد بررسی قرار داد. در این بازی‌ها اصول و مکانیزم یکسانی همانند آنچه که در پیش گفته شد، برقرار است. در نتیجه‌گیری این فصل یک بازی همزمان سه نفری بررسی می‌شود.

1 Simultaneous game

استراتژی‌ها

استراتژی ماکسی مین

استراتژی ماکسی مین^۱ به استراتژی گفته می‌شود که با انجام آن یک بازیکن هنوز هم بهترین بازدهی و نتیجه حاصل از بازی را در نامطلوب‌ترین وضعیت بازی به دست می‌آورد. هدف از این استراتژی کاهش و محدود کردن گستره زیان بازیکن است.

استراتژی ماکسی مین را می‌توان در یک ماتریس با هر تعداد استراتژی، مثلا n برای بازیکن اول و m برای بازیکن شماره دوم در دو مرحله تعیین کرد:

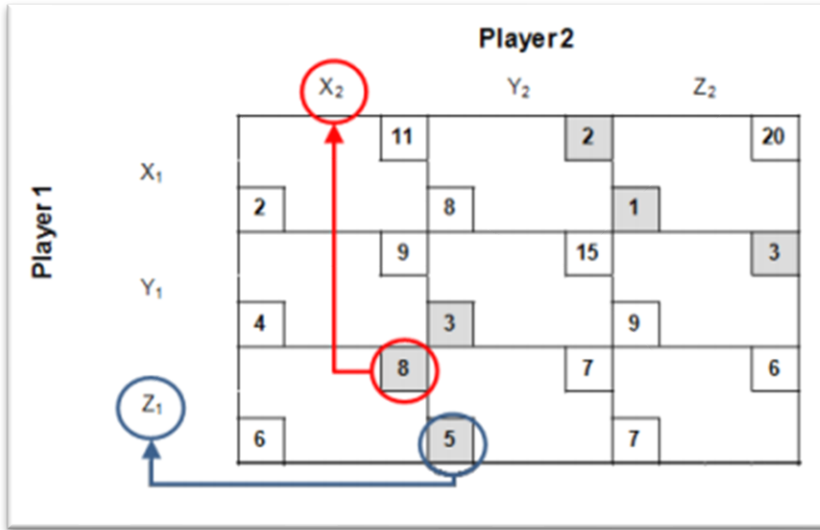
۱. در مرحله اول، کمترین بازده ممکن انفرادی (ماکسی مین A) مربوط به کمترین مقادیر بازده برای هر استراتژی با به حساب آوردن تمامی استراتژی‌های ممکن انتخاب می‌شود.

۲. در مرحله دوم، بیشترین مقدار (ماکسی مین A) در میان کمترین مقادیر بازدهی انتخاب خواهد می‌شود. این استراتژی، استراتژی ماکسی مین برای بازیکن مربوط نامیده می‌شود. برای یک بازیکن چندین استراتژی ماکسی مین می‌تواند وجود داشته باشد.

استراتژی ماکسی مین برای بازیکن اول با نماد MS_1 و استراتژی متناظر آن برای بازیکن دوم نیز با MS_2 نمایش داده می‌شود.

مثال زیر با استراتژی‌های $S_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ و $S_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$ راه دیگری برای نشان دادن این بازی است:

¹ MaxiMin strategy



برای استراتژی‌های X_1 ، Y_1 و Z_1 بازیکن یک به دنبال یافتن کمترین بازدهی ممکن (۱ و ۳ و ۵) است و در میان این مقادیر بالاترین مقدار (۵) است. روابط زیر برای بازیکن اول برقرار است:

$$\left. \begin{array}{l} \min A_1(X_1, S_2) = 1 \\ \min A_1(Y_1, S_2) = 3 \\ \min A_1(Z_1, S_2) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \max(1, 5, 3) = 5 \rightarrow MS_1 = Z_1$$

بنابراین، استراتژی ماکسی‌مین برای بازیکن اول همان استراتژی Z_1 است. روابط زیر

نیز برای استراتژی ماکسی‌مین برای بازیکن دوم برقرار است.

$$\left. \begin{array}{l} \min A_2(S_1, X_2) = 8 \\ \min A_2(S_1, Y_2) = 2 \\ \min A_2(S_1, Z_2) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \max(8, 2, 3) = 8 \rightarrow MS_2 = X_2$$

بنابراین استراتژی ماکسی‌مین برای بازیکن دوم، استراتژی X_2 است. استراتژی

ماکسی‌مین یک استراتژی است که دارای کمترین ریسک برای یک مقدار بازدهی کم

است، بدون آنکه هیچ‌گونه فرضیه‌ای در مورد ترجیحات حریف (یا حریفان) در نظر

گرفته شود.

استراتژی غالب

یک استراتژی غالب^۱ نامیده می‌شود، اگر آن استراتژی نسبت به سایر استراتژی‌های موجود بهتر باشد و استراتژی دیگری وجود نداشته باشد که بازیکن را در وضعیت بهتری قرار دهد یا اینکه حداقل در یک حالت خاص وی را در وضعیت بدتری قرار دهد. بنابراین یک استراتژی غالب نسبت به هر تغییر استراتژی از سوی حریفان «پایدار و بدون تغییر» است و در هر حالتی این استراتژی انتخاب می‌شود.

می‌توان مثالی از استراتژی غالب را در معمای زندانی، که پیش از این بررسی شد، نشان داد. در این بازی استراتژی غالب برای زندانی آن است که اعتراف کند؛ زیرا در هر وضعیتی این استراتژی وی را در وضعیت بهتری نسبت به استراتژی جایگزین اعتراف نکردن قرار می‌دهد.

اصلاح و تعدیل معمای زندانی می‌تواند مثال خوبی از اصول حاکم بر استراتژی غالب در اختیار ما قرار دهد. در این شکل اصلاح شده، هر دو زندانی به صورت قطعی برای یک سال به زندان خواهند رفت. به محض اینکه یکی از آنها به انجام جرم اعتراف کند، هر دو باید به مدت ۵ سال به زندان محکوم شوند. این وضعیت را می‌توان در ماتریسی به صورت زیر ترسیم کرد:

1 Dominant strategy

| | | Prisoner 2 | |
|------------|----------------|------------|---------------|
| | | A: Confess | B: Notconfess |
| Prisoner 1 | A: Confess | -5 | -5 |
| | B: Not confess | -5 | -1 |

همان‌طور که در شکل فوق مشاهده می‌شود، استراتژی (اعتراف نکردن) $S_1 =$ استراتژی غالب برای زندانی اول است؛ زیرا با تغییر دادن این استراتژی به استراتژی (اعتراف کردن) $S_1 =$ ، این زندانی به هیچ‌وجه در وضعیت بدتری قرار نخواهد گرفت و هیچ نگرانی ندارد که زندانی دوم استراتژی (اعتراف کردن) $S_2 =$ را انتخاب کند. تنها در حالی زندانی اول شرایط بهتری خواهد یافت که زندانی دوم استراتژی (اعتراف نکردن) $S_2 =$ را انتخاب کند. بنابراین در این حالت روابط زیر برقرار است:

(اعتراف نکردن) $S_1 =$ که استراتژی غالب برای بازیکن اول است.

(اعتراف نکردن) $S_2 =$ که استراتژی غالب برای بازیکن دوم است.

در صورتی که در یک بازی برای یک بازیکن استراتژی غالب وجود داشته باشد، این بازیکن همیشه استراتژی غالب را می‌کند.

استراتژی مغلوب

استراتژی مغلوب^۱ یک بازیکن در یک بازی عبارت از استراتژی است که در هر شرایطی که به کار گرفته شود، بد نیست (این شرایط می‌تواند با انجام هر استراتژی ممکن دیگری از سوی حریف همراه باشد) و پیروی از این استراتژی می‌تواند حداقل در یک حالت خاص واقعاً بهتر باشد. برای تجزیه و تحلیل بهتر، این استراتژی را می‌توان از ماتریس بازی حذف کرد؛ زیرا این استراتژی در هیچ حالتی در مقایسه با استراتژی غالب برای بازیکن دارای مزیت نیست.

ماتریس زیر نشانگر استراتژی مغلوب است.

| | | Player 2 | | |
|----------|-------|----------|-------|-------|
| | | X_2 | Y_2 | Z_2 |
| Player 1 | X_1 | 0 | 0 | 0 |
| | Y_1 | 1 | 1 | 0 |
| | Z_1 | 0 | 0 | 2 |

با توجه به ماتریس ارائه شده در بالا، بسیار روشن است که بازیکن اول استراتژی Y_1 را به استراتژی X_1 ترجیح می‌دهد؛ زیرا در هر یک از این حالت‌ها این استراتژی برای وی مزیت به همراه خواهد داشت (اگر بازیکن دوم استراتژی X_2 یا Y_2 را انتخاب کند) یا

¹ Dominated strategy

اینکه حداقل او را در وضعیت بدتری قرار نمی‌دهد (اگر بازیکن دوم استراتژی Z_2 را انتخاب کند). بنابراین از دیدگاه بازیکن اول روابط زیر برقرار است:

$$A_1(X_1, X_2) < A_1(Y_1, X_2) \text{ است، زیرا } 0 < 1 \text{ است.}$$

$$A_1(X_1, X_2) < A_1(Y_1, Y_2) \text{ است، زیرا } 0 < 1 \text{ است.}$$

$$A_1(X_1, Z_2) < A_1(Y_1, Z_2) \text{ است، زیرا } 0 = 0 \text{ است.}$$

بنابراین می‌توان گفت که $Y_1 > X_1$ است.

این رابطه با توجه به استراتژی‌های بازیکن اول برای ترجیحات این بازیکن قبل تعریف است، یعنی بازیکن اول استراتژی Y_1 را به استراتژی X_1 ترجیح می‌دهد. همچنین، می‌توان گفت که استراتژی X_1 بر استراتژی Y_1 غلبه دارد. در این حالت، اینکه بازیکن اول کدام استراتژی را انتخاب می‌کند، به این بستگی دارد که بازیکن دوم کدام استراتژی را انتخاب خواهد کرد.

از آنجا که بازیکن اول هرگز استراتژی X_1 را انتخاب نمی‌کند و استراتژی Y_1 را به آن ترجیح می‌دهد، می‌توان استراتژی X_1 را از فرآیند بازی حذف کرد.

| | | Player 2 | | |
|----------|-------|----------|-------|-------|
| | | X_2 | Y_2 | Z_2 |
| Player 1 | X_1 | 0 | 0 | 0 |
| | Y_1 | 1 | 1 | 0 |
| | Z_1 | 0 | 0 | 2 |

پس از حذف استراتژی X_1 ، بازی اصلاح شده به صورت زیر قابل نمایش است.

| | | Player 2 | | |
|----------|-------|----------|-------|-------|
| | | X_2 | Y_2 | Z_2 |
| Player 1 | Y_1 | 1 | 1 | 0 |
| | Z_1 | 0 | 0 | 2 |

در نتیجه، در این بازی تعدیل شده، برای بازیکن دوم استراتژی Y_2 بر استراتژی X_2 غالب است، زیرا روابط زیر میان استراتژی‌ها برقرار است.

$$A_2(Y_1, X_2) < A_2(Y_1, Y_2) \text{ زیرا } 0 < 1 \text{ است.}$$

$$A_1(Z_1, X_2) < A_1(Z_1, Y_2) \text{ زیرا } 0 < 1 \text{ است.}$$

با توجه به روابط فوق $X_2 < Y_2$ است؛ یعنی در ماتریس زیر استراتژی X_2 حذف شده

است.

| | | Player 2 | | |
|----------|-------|----------|-------|-------|
| | | X_2 | Y_2 | Z_2 |
| Player 1 | Y_1 | 0 | 1 | 0 |
| | Z_1 | 1 | 0 | 2 |

Note: The column for X_2 is crossed out with a red 'X' in the original image.

پس از حذف استراتژی X_2 بازی زیر به عنوان یک بازی جدید قابل تعریف است:

| | | Player 2 | |
|----------|-------|----------|-------|
| | | Y_2 | Z_2 |
| Player 1 | Y_1 | 1 | 0 |
| | Z_1 | 0 | 2 |

تعادل‌ها در استراتژی‌های خالص

پاسخ‌های بهینه

مفهوم پاسخ بهینه¹ برای درک نظریه بازی و تعیین تعادل‌ها در بازی دارای اهمیت فراوانی است. بهترین پاسخ‌ها همواره به استراتژی نسبی حریف بستگی دارد. به عنوان مثال، در قبال هر استراتژی مربوط به بازیکن دوم، یک یا بیش از یک پاسخ بهینه برای بازیکن اول وجود دارد.

¹ Best responses

یک بار دیگر به معمای زندانی نگاهی می‌اندازیم:

| | | Prisoner 2 | |
|------------|----------------|------------|----------------|
| | | A: Confess | B: Not Confess |
| Prisoner 1 | A: Confess | -5, -5 | -10, 0 |
| | B: Not confess | 0, 0 | -1, -1 |

در صورتی که زندانی دوم اعتراف کند، پاسخ بهینه زندانی اول این است که وی نیز اعتراف کند. اگر زندانی دوم اعتراف نکند، پاسخ بهینه زندانی اول باز این است که اعتراف کند. در این حالت روابط زیر برقرار است:

$$BR_1(\text{اعتراف کردن}) = (\text{اعتراف کردن})$$

$$BR_1(\text{اعتراف نکردن}) = (\text{اعتراف کردن})$$

$$BR_2(\text{اعتراف کردن}) = (\text{اعتراف کردن})$$

$$BR_2(\text{اعتراف نکردن}) = (\text{اعتراف کردن})$$

در ابتدا از یک استراتژی شروع می‌کنیم و برای آن پاسخ‌های بهینه را تعیین می‌کنیم و این فرآیند را ادامه می‌دهیم یعنی پاسخ بهینه برای یک استراتژی تعیین می‌شود و سپس پاسخ بهینه‌ای برای آن پاسخ بهینه تعیین می‌گردد و این فرآیند بهینه‌یابی تا زمانی ادامه می‌یابد که پاسخ بهینه‌ای برای یک زوج از استراتژی‌ها که در نوع خود نیز بهترین استراتژی هستند، پیدا شود. این جست‌وجو به پاسخ تعادلی می‌انجامد. در حالت تعادل برای هیچ‌یک از بازیکنان به صرفه نیست که به صورت یک‌طرفه از نقطه تعادلی دور

شوند. در ادامه بحث به‌زودی به موضوع تعادل باز می‌گردیم، زیرا لازم است که تعادل نش را تعریف کنیم و کاربرد آن را توضیح دهیم.

باید تأکید کرد که در حالت تعادل فرآیند بهینه‌یابی همیشه پایان‌پذیر نیست. این امر در مثال زیر به‌خوبی نشان داده می‌شود. که در این مثال فرآیند مذکور از زوج مرتب $S = (Y_1, X_2)$ آغاز می‌شود. ولی «چرخه پاسخ بهینه» به یک تعادل پایدار منجر نمی‌شود:

| | | Player 2 | | |
|----------|-------|----------|-------|-------|
| | | X_2 | Y_2 | Z_2 |
| Player 1 | X_1 | 11 | 2 | 20 |
| | Y_1 | 2 | 8 | 1 |
| | Z_1 | 4 | 3 | 9 |
| | | 9 | 15 | 3 |
| | | 8 | 7 | 6 |
| | | 5 | 6 | 7 |

در این مثال بازیکن اول با استراتژی Y_1 بازی را آغاز می‌کند و بازیکن دوم در مقابل این استراتژی، پاسخ بهینه خود را به صورت $BR_2(Y_1) = Y_2$ انتخاب می‌کند. اگر این سرخ را گرفته، به جست‌وجو ادامه دهیم، نتایج زیر پاسخ‌های بهینه برای این بازی را نشان می‌دهد:

$$BR_2(Y_1) = Y_2 \rightarrow S = (Y_1, Y_2)$$

$$BR_1(Y_2) = X_1 \rightarrow S = (X_1, Y_2)$$

$$BR_2(X_1) = Z_2 \rightarrow S = (Y_1, Z_2)$$

$$BR_1(Z_2) = Y_1 \rightarrow S = (Y_1, Z_2)$$

تعادل‌های نش

تعادل‌های نش^۱ یکی از اساسی‌ترین مفاهیم برای حل مسائل مربوط به نظریه بازی است. این تعادل‌ها در سال ۱۹۵۰ توسط جان نش ارائه شد و محدوده آنها بسیار فراتر از بازی‌های همزمان است و تقریباً تمامی شکل‌های بازی‌ها را در بر می‌گیرد.

تعادل نش عبارت از حالتی است که در یک استراتژی مشخص، برای یک بازیکن به صرفه نیست که تنها بازیکنی باشد که استراتژی خود را تغییر دهد. بنابراین در تعادل نش هیچ بازیکنی انگیزه ندارد که به تنهایی از نقطه تعادل دور شود.

می‌توان عبارت «دور شدن از نقطه تعادل به صورت انفرادی به صرفه نیست»، را به‌عنوان یک قاعده سرانگشتی برای تشخیص تعادل نش معرفی کرد.^۲ بار دیگر می‌توان از معمای زندانی یک مثال استفاده کرد:

| | | Prisoner 2 | |
|------------|----------------|------------|----------------|
| | | A: Confess | B: Not Confess |
| Prisoner 1 | A: Confess | -5, -5 | -10, 0 |
| | B: Not confess | 0, -10 | -1, -1 |

وضعیتی به صورت (اعتراف کردن، اعتراف کردن) S^* یک تعادل نش است؛ زیرا برای هیچ‌یک از بازیکنان به صرفه نخواهد بود که تنها کسی باشد که از استراتژی تعادلی دور می‌شود (یعنی ۱۰ سال را در زندان سپری کند). تنها در صورتی که هر دو بازیکن

1 Nash equilibrium

^۲ براساس این تعریف، تعادل نش عبارت از حالتی است که در آن هیچ کدام از بازیکنان نتواند با تغییر رفتار (بازی) خود، به شرط ثبات رفتار (بازی) بازیکن رقیب، وضعیت (مطلوبیت) خود را بهبود بخشد (مترجمان).

به دنبال تغییر استراتژی خود باشند، انگیزه برای ایجاد تغییر در استراتژی وجود خواهد داشت. برای نشان دادن تعادل نش در این مثال از فرم نوشتاری زیر استفاده می‌کنیم:

$$S^* = (\text{اعتراف کردن, اعتراف کردن})$$

$$S_1^* = \text{اعتراف کردن}$$

$$S_2^* = \text{اعتراف کردن}$$

که در آن S^* نشان دهنده تعادل نش است و S_1^* نشان‌دهنده تعادل نش برای بازیکن اول و S_2^* نیز نشان‌دهنده تعادل نش برای بازیکن دوم است.

اما سوال پیش رو آن است که چگونه می‌توان به صورت عملی و روشمند در یک بازی همزمان دو نفری با هر تعداد استراتژی تعادل نش را تعیین کرد؟ آسان‌ترین راه این است که ابتدا به سراغ تمامی استراتژی‌های امکان‌پذیر برای بازیکن دوم، در مقابل بازیکن اول برویم و در هر مورد بهترین بازده و نتیجه حاصل از بازی را برای استراتژی‌های متنوع تعیین کنیم. این فرآیند به صورت معکوس برای بازیکن اول نیز باید انجام گیرد. از این طریق می‌توان پاسخ‌های بهینه را در برابر تمامی استراتژی‌های ممکن برای حریف تعیین کرد. آنگاه تعادل‌های نش تمامی وضعیت‌هایی است که در آن مقدار بازده برای هر دو بازیکن مقدار بهینه است.

| | | Player 2 | | |
|----------|-------|----------|-------|-------|
| | | X_2 | Y_2 | Z_2 |
| Player 1 | X_1 | 0 | 1 | 0 |
| | Y_1 | 0 | 1 | 0 |
| | Z_1 | 0 | 0 | 2 |

اکنون می‌توان این روش را در ۶ مرحله به‌انجام رساند. اولین گام وقتی است که بازیکن دوم استراتژی ۳ را انتخاب می‌کند. بررسی را با بازیکن اول و استراتژی X_2 آغاز می‌کنیم.

۱. اگر بازیکن دوم استراتژی X_2 را انتخاب کند، پاسخ بهینه بازیکن اول، استراتژی Y_1 با بازده $A_1(Y_1, X_2) = 1$ است (خانه سطر دوم ستون اول جدول).

۲. اگر بازیکن دوم استراتژی Y_2 را انتخاب کند، پاسخ بهینه بازیکن اول، استراتژی Y_1 با بازده $A_1(Y_1, Y_2) = 1$ است (خانه سطر دوم ستون دوم جدول).

۳. اگر بازیکن دوم استراتژی Z_2 را انتخاب کند، پاسخ بهینه بازیکن اول، استراتژی Z_1 با بازده آن $A_1(Z_1, Z_2) = 1$ است (خانه سطر سوم ستون سوم جدول).

۴. اگر بازیکن اول استراتژی X_1 را انتخاب کند، پاسخ بهینه بازیکن دوم، استراتژی Y_2 با بازده $A_2(X_1, Y_2) = 1$ است (خانه سطر اول ستون دوم جدول).

۵. اگر بازیکن ۱ استراتژی Y_2 را انتخاب کند، پاسخ بهینه بازیکن دوم، استراتژی Y_2 با بازده $A_2(Y_1, Y_2) = 1$ است (خانه سطر دوم ستون دوم جدول).

۶. اگر بازیکن اول استراتژی Z_1 را انتخاب کند، پاسخ بهینه بازیکن دوم، استراتژی Z_2 با بازده $A_2(Z_1, Z_2) = 1$ است (خانه سطر سوم ستون سوم جدول).

به این ترتیب شش پاسخ بهینه مشخص شده است که از میان آنها بازده حاصل از بازی در استراتژی‌های (Y_1, Y_2) و (Z_1, Z_2) مقادیر بهینه است.

هر کدام از این خلنه‌ها نشانگر یک تعادل نش است، بنابراین این بازی دارای دو تعادل نش به صورت زیر است:

$$S^* = (Y_1, Y_2), S_1^* = Y_1, S_2^* = Y_2$$

شش مرحله‌ای که در اینجا برای تعیین تعادل نش بیان شد، باردیگر در تصویر زیر نشان داده شده‌اند:

| | | Player2 | | |
|---------|-------|---------|-------|-------|
| | | X_2 | Y_2 | Z_2 |
| Player1 | X_1 | 0 | 4 | 0 |
| | Y_1 | 1 | 5 | 0 |
| | Z_1 | 0 | 2 | 2 |

تعادل محض (اکید)

در صورتی که استراتژی تمامی بازیکنان در تعادل نش همزمان استراتژی غالب نیز باشند، به این تعادل، تعادل محض (اکید)^۱ نش می‌گویند. معیار اصلی برای اکید بودن تعادل آن است که تعادل مورد نظر اکیداً بهتر از حالتی باشد که در آن قرار دارد. نتیجه

1 Strict equilibrium

وجود تعادل اکید آن است که هر بازیکن تنها یک پاسخ بهینه در برابر استراتژی‌های حریف خود خواهد داشت. این بدان معناست که در یک بازی نمی‌تواند چندین تعادل اکید نش وجود داشته باشد. بازی زیر را در نظر بگیرید.

| | | Player 2 | |
|----------|-------|----------|-------|
| | | X_2 | Y_2 |
| Player 1 | X_1 | 5 | 1 |
| | Y_1 | 1 | 1 |

در این بازی استراتژی‌های $S_1^*(X_1, X_2)$ و $S^{**} = (Y_1, Y_2)$ تعادل‌های نش هستند؛ زیرا X_1 استراتژی غالب برای بازیکن اول و X_2 استراتژی غالب برای بازیکن دوم است و S^* نیز یک تعادل اکید نش برای این بازی است.

به‌طورکلی می‌توان گفت $S_1^*(X_1, X_2)$ زمانی به‌عنوان یک تعادل اکید نش در نظر گرفته می‌شود که نه تنها فقط X_1 بلکه X_2 نیز یک استراتژی غالب باشد. تعادل‌های اکید همیشه تعادل‌های نش هستند.

تعادل‌های نش و پاسخ‌های بهینه

تعادل‌های نش و پاسخ‌های بهینه دارای ارتباط مستقیمی هستند. برای نشان دادن این مثال زیر را می‌توان ارائه کرد.

| | | Player 2 | | |
|----------|-------|----------|-------|-------|
| | | X_2 | Y_2 | Z_2 |
| Player 1 | X_1 | 11 | 2 | 20 |
| | Y_1 | 9 | 15 | 3 |
| | Z_1 | 8 | 7 | 6 |

تنها تعادل نش در این بازی استراتژی $S^* = (Z_1, X_2)$ است. برای دستیابی به پاسخ بهینه به استراتژی تعادل نش برای حریف به ترتیب پاسخ‌های بهینه زیر برای بازیکن ۱ و بازیکن ۲ به کار می‌رود.

$$BR_2(Z_1) = X_2$$

$$BR_1(X_2) = Z_1$$

پاسخ بهینه حاصل از تعادل‌های نش بار دیگر یک تعادل نش را نتیجه می‌دهد. به همین علت است که گفته می‌شود که تعادل نش، «بهترین پاسخ به خود» است.

تعادل‌ها در استراتژی‌های ترکیبی

استراتژی‌های ترکیبی و بازده مورد انتظار

بر خلاف استراتژی‌های خالص، در استراتژی‌های ترکیبی بازیکن تنها روی یک استراتژی (خالص) تصمیم‌گیری نمی‌کند، بلکه چندین استراتژی خالص را بازی می‌کند که هر کدام از آنها دارای احتمال مشخصی است.

یک مثال سنتی برای یک بازی با استراتژی ترکیبی، پرتاب یک سکه است که در آن ۵۰ درصد احتمال آمدن شیر یا خط وجود دارد. فرض کنید که بازیکن یک سکه را

پرتاب می‌کند. در صورتی که خط بیاید، ۲ دلار دریافت می‌کند و در صورتی که شیر بیاید، پولی دریافت نخواهد کرد. در این بازی برای پرتاب کردن سکه پولی دریافت نمی‌شود. در این حالت ماتریس بازده به صورت زیر است:

| | | Coin | |
|--------|-----------------------|---------------|---------------|
| | | X_2 : Heads | Y_2 : Tails |
| Player | X_1 : Toss the coin | 0 | 0 |
| | 0 | 2 | |

از آنجا که در این بازی احتمال آمدن شیر یا خط $\frac{1}{2}$ است، می‌توانیم روابط زیر را برای استراتژی ترکیبی پرتاب سکه تدوین کرد:

$$S_{coin} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

در این عبارت استراتژی‌های قابل انتخاب ارائه نشده‌است، بلکه به جای آنها احتمالی بیان می‌شود که بر اساس آن استراتژی‌ها بازی می‌شوند. اگر کسی نمی‌تواند تصور کند که پرتاب سکه بیانگر یک استراتژی است، به جای آن می‌تواند بازیکنی را در نظر بگیرد که بر اساس استراتژی X_2 و Y_2 با پرتاب یک سکه در هر حالت تصمیم‌گیری می‌کند. اکنون سوال پیش روی ما این است که بازده مورد انتظار بازیکن از انجام این بازی چقدر بالاست؟ از آنجا که بازیکن دارای یک شانس ۵۰ درصد برای دریافت ۰ دلار (آمدن شیر) و شانس ۵۰ درصد برای دریافت ۲ دلار (آمدن خط) است، بازدهی مورد انتظار وی به صورت زیر است:

$$\frac{1}{2} \cdot 0\$ + \frac{1}{2} \cdot 2\$ = 1\$$$

برای به دست آوردن بازده مورد انتظار می‌توانیم بنویسیم:

$$E\left(A_{player}\left(\text{پرتاب سکه}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)\right) = \frac{1}{2}(0)\$ + \frac{1}{2}(2)\$ = 1\$$$

یعنی «بازده مورد انتظار برای بازیکن اول زمانی که سکه را پرتاب می‌کند برابر با عدد ۱ است.» یک مثال اندکی پیچیده‌تر می‌تواند این وضعیت را به شکل روشن‌تری نشان دهد:

| | | Player 2 | |
|----------|-------|----------|-------|
| | | X_2 | Y_2 |
| Player 1 | X_1 | 2 | 1 |
| | Y_1 | 3 | 4 |

فرض کنیم که بازیکن دوم، به احتمال ۲۵ درصد استراتژی X_2 و به احتمال ۷۵ درصد استراتژی Y_2 را به اجرا در آورد. بنابراین استراتژی وی به صورت زیر خواهد بود:

$$S_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

اکنون باید حساب کرد که بازدهی مورد انتظار برای بازیکن اول در صورتی که استراتژی X_1 را به اجرا در آورد چقدر است.

$$E\left(A_1\left(X_1, \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right)\right) = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 2/75$$

بازده مورد انتظار برای بازیکن اول در صورتی که وی استراتژی X_1 را اجرا کند و

بازیکن دوم استراتژی $S_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ را به اجرا در آورد، برابر با ۲/۷۵ است.

حال فرض کنیم که بازیکن اول می‌خواهد یک استراتژی ترکیبی مانند

$S_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ را به اجرا در آورد. هر کدام از ترکیب‌های مربوط به استراتژی‌ها با یک

احتمال مشخص بازی می‌شوند:

| | | |
|------------------|--------|------------------------------------|
| $S = (X_1, X_2)$ | .125 | $(=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4})$ |
| $S = (X_1, Y_2)$ | 37.5 % | $(=\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4})$ |
| $S = (Y_1, X_2)$ | 12.5 % | $(=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4})$ |
| $S = (Y_1, Y_2)$ | 37.5 % | $(=\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4})$ |
| | =100 | =1 |

بنابراین، بازدهی مورد انتظار برای بازیکن ۱ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 E(A_1((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))) &= \frac{1}{2} (\frac{1}{4}) 2 + \frac{1}{2} (\frac{3}{4}) 3 + \frac{1}{2} (\frac{1}{4}) 1 + \frac{1}{2} (\frac{3}{4}) 4 \\
 &= \frac{2}{8} + \frac{9}{8} + \frac{1}{8} + \frac{12}{8} \\
 &= \frac{24}{8} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

تعادل‌های ترکیبی نش

تعادل‌های ترکیبی نش^۱ آن دسته از تعادل‌های نش هستند که از استراتژی‌های ترکیبی ساخته شده‌اند. این استراتژی‌ها را می‌توان به خوبی با استفاده از بازی «سنگ، کاغذ قیچی» توضیح داد که در آن سنگ قیچی را شکست می‌دهد، قیچی کاغذ را شکست می‌دهد و کاغذ نیز سنگ را شکست می‌دهد.

برنده این بازی ۱ دلار پول دریافت می‌کند که آن را فرد بازنده می‌پردازد. اگر هر دو بازیکن استراتژی یکسانی را انتخاب کنند، هیچ‌کس چیزی دریافت نمی‌کند. از این رو، ماتریس بازده برای این بازی به صورت زیر است.

1 Nash mixed equilibriums

| | | Player 2 | | |
|----------|--------------------------|-----------------------|--------------------------|------------------------|
| | | X ₂ : Rock | Y ₂ : Scissor | Z ₂ : Paper |
| Player 1 | X ₁ : Rock | 0 | -1 | 1 |
| | Y ₁ : Scissor | 1 | 0 | -1 |
| | Z ₁ : Paper | -1 | 1 | 0 |

این بازی هیچ‌گونه تعادل نش به صورت استراتژی خالص ندارد. اما سؤال این است که بازیکن کدام استراتژی را دنبال می‌کند؟ اگر بازیکنان این بازی را چندین بار با موفقیت بازی کنند، هر دو بازیکن معمولاً تلاش می‌کنند که این بازی را به صورت محافظه کارانه و رمزگونه¹ بازی کنند؛ یعنی که در بلند مدت سعی می‌کنند که، استراتژیی را بازی کنند که با استراتژی‌های قبلی متفاوت باشد؛ زیرا بازیکن رقیب با درک مقابل این موضوع می‌تواند منفعت کسب کند و استراتژی مخالف مناسب، برای مقابله با این استراتژی را برگزیند. تنها در صورتی که هر بازیکن، هر استراتژی خود را با احتمالات یکسان بازی کند، آنگاه انگیزه‌ای برای هیچ‌یک از بازیکنان وجود ندارد که استراتژی خود را تغییر دهد.

در این حالت، استراتژی زیر

$$S^* = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right)$$

¹ Inscrutably

بر طبق روابط بالا یک تعادل نش است که از استراتژی‌های ترکیبی ساخته شده است. همانطور که نشان داده شد، در این تعادل هیچ بازیکنی انگیزه‌ای برای دوری از این استراتژی و تغییر رفتار ندارد.

به طور اصولی، هر بازی دارای یک تعادل نش است. اگر هیچ‌گونه تعادل نش در استراتژی‌های خالص وجود نداشته باشد، حداقل یک تعادل نش با استراتژی ترکیبی وجود خواهد داشت. البته، یک بازی می‌تواند تعادل نش با هر دو نوع استراتژی خالص و ترکیبی را در خود داشته باشد.

اکنون سوال این است که چگونه می‌توان یک تعادل نش با استراتژی‌های ترکیبی را تعیین کرد؟ برای این منظور، بازی ساده زیر را در نظر می‌گیریم که در آن بازیکن اول استراتژی X_1 را با احتمال p و استراتژی Y_1 با احتمال $(1-p)$ بازی می‌کند و بازیکن دوم استراتژی X_2 را با احتمال q و استراتژی Y_2 را با احتمال $(1-q)$ انجام می‌دهد.

| | | Player 2 | |
|----------|------------|----------|------------|
| | | $X_2(q)$ | $Y_2(1-q)$ |
| Player 1 | $X_1(p)$ | 1, 2 | 0, 2 |
| | $Y_1(1-p)$ | 2, 0 | 2, 0 |

این بازی هیچ‌گونه تعادل نش با استراتژی خالص را در خود ندارد. البته، از آنجا که هر بازی حداقل دارای یک تعادل نش است، در این بازی حداقل یک تعادل ترکیبی نش به صورت ترکیبی وجود دارد.

برای تعیین یک تعادل ترکیبی نش، هر بازیکن باید با توجه به احتمالات موجود، استراتژی‌های خود را به گونه‌ای بازی کند که حریف وی نسبت به این استراتژی‌ها

بی تفاوت باشد. با بازگشت به بازی «سنگ، کاغذ، قیچی» می‌توان گفت که این جمله بدان معناست که هر بازیکن باید استراتژی خود را به گونه‌ای انتخاب کند که بازیکن حریف نتواند در مقابل او استراتژی خاصی را بازی کند و از او پیشی بگیرد و در این صورت بازیکن اول انگیزه‌ای برای تغییر استراتژی خود ندارد.

با بازگشت به مثال قبل بررسی می‌کنیم که بازیکن اول باید کدام استراتژی‌ها را بازی کند تا بازیکن دوم نسبت به استراتژی وی بی تفاوت باشد. به عنوان مثال، برای این منظور بازده مورد انتظار بازیکن دوم برای استراتژی‌های X_2 و Y_2 باید با هم برابر باشد. این نتایج را می‌توان در معادله زیر نشان داد:

$$E(A_2((p, (1-p), X_2)) = E(A_2((p, (1-p), X_2))$$

این معادله را می‌توان با مقادیر احتمالات و بازدهی‌های اکید زیر حل کرد:

$$p \cdot 2 + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2$$

$$\rightarrow 2p = 2 - 2p$$

$$\rightarrow 4p = 2$$

$$p = 1/2$$

فرض کنیم بازیکن دوم نیز کار مشابهی انجام دهد در این حالت معادله مربوط به

صورت زیر است.

$$E(A_1(X_1(q, (1-q)))) = E(A_1(Y_1, (q, (1-q))))$$

$$q \cdot 1 + (1-q) \cdot 2 = q \cdot 2$$

$$\rightarrow q + 2 - 2q = 2q$$

$$\rightarrow 2 = 3q$$

$$\rightarrow q = 2/3$$

در نتیجه بازی مورد نظر دارای یک تعادل نش ترکیبی با احتمالات مشخص زیر

است.

$$S^* = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right)$$

آیا در صورتی که بیش از دو استراتژی برای هر بازیکن در وجود داشته باشد، می‌توان تعادل ترکیبی نش را محاسبه کرد؟ برای پاسخ به این سؤال بار دیگر به بازی «سنگ، کاغذ، قیچی» باز می‌گردیم و به روش ریاضی محاسبات لازم را انجام می‌دهیم.

نخست فرض می‌کنیم که بازیکن اول با احتمال p سنگ، با احتمال q قیچی و با احتمال $(1 - p - q)$ کاغذ بازی می‌کند.

| | | Player 2 | | |
|----------|--------------------------------|-----------------------|--------------------------|------------------------|
| | | X ₂ : Rock | Y ₂ : Scissor | Z ₂ : Paper |
| Player 1 | X ₁ : Rock (p) | 0 | -1 | 1 |
| | Y ₁ : Scissor (q) | 1 | 0 | -1 |
| | Z ₁ : Paper (1-p-q) | -1 | 1 | 0 |

بررسی می‌کنیم که بازیکن اول باید کدام استراتژی را انتخاب کند تا بازیکن دوم در قبال استراتژی‌های وی بی‌تفاوت باشد.

$$\begin{aligned} E(A_2((p, q, (1 - p - q)), Rock) \\ &= E(A_2((p, q, (1 - p - q)), Scissor) \\ &= E(A_2((p, q, (1 - p - q)), Paper) \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} E(A_2((p, q, (1 - p - q)), Rock) &= E(A_2((p, q, (1 - p - q)), Scissor) \\ E(A_2((p, q, (1 - p - q)), Scissor) &= E(A_2((p, q, (1 - p - q)), Paper) \\ E(A_2((p, q, (1 - p - q)), Rock) &= E(A_2((p, q, (1 - p - q)), Paper) \end{aligned}$$

معادلات بالا باید در یک تعادل ترکیبی نش صادق باشند برای بازیکن اول مقدار عددی معادلات به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$(1): p \cdot 0 + q \cdot 1 + (1-p-q) \cdot (-1) = p \cdot (-1) + q \cdot 0 + (1-p-q) \cdot 1$$

$$q - 1 + p + q = -p + 1 - p - q$$

$$2q + p = -2p + 2 - q$$

$$3q = -3p + 2$$

$$q = \frac{2}{3} - p$$

معادلات سه گانه برای بازیکن دوم به صورت زیر قابل حل است.

$$p \cdot (-1) + q \cdot 0 + (1-p-q) \cdot 1 = p \cdot 1 + q \cdot (-1) + (1-p-q) \cdot 0$$

$$-p + 1 - p - q = p - q$$

$$1 - 2p - q = p - q$$

$$3p = 1$$

$$\rightarrow p = \frac{1}{3}$$

با قرار دادن مقدار p در معادله $q = \frac{2}{3} - p$ مقدار q محاسبه می‌شود.

$$q = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

بنابراین احتمالات p ، q و $(1-p-q)$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\rightarrow p = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}, 1 - p - q = \frac{1}{3}$$

در این مرحله برای بررسی صحت معادله زیر

$$p \cdot 0 + q \cdot 1 + (1-p-q) \cdot (-1) = p \cdot 1 + q \cdot (-1) + (1-p-q) \cdot 0$$

$$\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$$

$$0 = 0$$

کافی است که مقادیر احتمالات p و q را در آن جایگزین کنیم.

بنابراین برای مقادیر مذکور معادله فوق صادق است و استراتژی که برای بازیکن اول در تعادل نش مورد استفاده قرار می‌گیرد، به صورت زیر است:

$$S_1^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

نتایج یکسانی نیز برای بازیکن دوم به دست می‌آید بنابراین تعادل ترکیبی نش به صورت زیر است:

$$S^* = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$$

در عین حال، همان‌طور که در شکل زیر نیز می‌توان مشاهده کرد، بازی‌هایی وجود دارند که در آنها هم تعادل‌های خالص و هم تعادل‌های ترکیبی قابل مشاهده است.

| | | Player 2 | |
|----------|------------|----------|------------|
| | | $X_2(q)$ | $Y_2(1-q)$ |
| Player 1 | $X_1(p)$ | 2 | 0 |
| | $Y_1(1-p)$ | 0 | 4 |

این بازی دارای دو تعادل نش با استراتژی‌های خالص است.

$$S^* = (X_1, X_2)$$

$$S^{**} = (Y_1, Y_2)$$

علاوه بر آن، این بازی دارای تعادل ترکیبی نش به صورت زیر نیز هست:

$$S^{***} = \left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$$

شکل‌های خاص برای بازی‌ها

بازی‌های عادلانه

یک بازی را بازی عادلانه^۱ می‌گویند اگر هر دو بازیکن دقیقاً دارای وضعیت یکسانی باشند. وقتی که هر دو بازیکن با ترکیب استراتژی یکسان، بازده یکسانی نیز به دست آورند، این بازی یک بازی عادلانه است. می‌توان بازی‌های عادلانه را توسط ماتریس نمایش بازی تشخیص داد. بازی‌های عادلانه دارای ماتریس بازده قطری هستند که از بالا سمت چپ ماتریس آغاز می‌شود و به پایین سمت راست آن منتهی می‌شود. معادلات زیر برای یک بازی عادلانه برقرار است.

$$A_1(X_1, X_2) = A_2(X_1, X_2)$$

$$A_1(X_1, Y_2) = A_2(Y_1, X_2)$$

$$E\left(A_1\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)\right) = E\left(A_2\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

نمونه مثال‌های بازی‌های عادلانه بازی «سنگ، کاغذ، قیچی» و بازی معمای زندانی است.

بازی‌های مجموع صفر

یک بازی مجموع صفر^۲ بازی است که در آن مجموع بازده در هر خانه از ماتریس بازی برابر با صفر است. به عبارت دیگر، در یک بازی مجموع صفر برد یک بازیکن مستلزم باخت بازیکن دیگر است. برای یک بازی مجموع صفر می‌توان بازی «سنگ، کاغذ، قیچی» را مثال زد که یک بازی عادلانه نیز هست. اما الزامی وجود ندارد که هر بازی مجموع صفر حتماً باید عادلانه نیز باشد. در یک بازی این امکان وجود دارد که در

1 Fair games

2 Zero sum games

تمامی مراحل آن، فقط یک بازیکن پیروز شود و بازیکن دوم باید مبالغی را کهبازیکن اول برده است، «بپردازد». در این حالت بازی دارای مجموع صفر است، اما یک بازی عادلانه نیست.

بازی‌های همزمان در اقتصاد

بازی ورود به بازار

یکی از مثال‌های معروف برای بازی‌های همزمان، بازی‌های ورود به بازار است که در آن شرکت‌های هوایی رقیب ایرباس و بویینگ به دنبال ورود به بازار هستند. از آنجا هزینه‌های توسعه‌ای این شرکت‌ها بسیار بالا، و ظرفیت بازار محدود است، در صورتی که ایرباس و بویینگ هر دو با هم وارد بازار شوند و بازار را بین خود تقسیم کنند، ممکن است که هیچ منفعتی از این تقسیم به دست نخواهند آورد؛ زیرا هزینه‌های توسعه‌ای بنگاه بسیار بیشتر از منافع مورد انتظار حاصل از ورود به بازار است و ممکن است هر دو بنگاه ضرر کنند. برعکس، اگر یکی از آن شرکت‌ها بازار را ترک کند و آن را به رقیب خود بسپارد، شرکت رقیب هزینه‌های توسعه‌ای نخواهد داشت و سودهای بسیار هنگفتی را کسب خواهند کرد؛ زیرا کل بازار را به خود اختصاص می‌دهد. در صورتی که هیچ‌کدام از بنگاه‌ها به بازار وارد نشود، هیچ هزینه و سودی برای آن‌ها وجود نخواهد داشت.

اگر هزینه‌های توسعه هر بنگاه حدود ۵۰ دلار و بازار دارای ظرفیت کسب درآمد ۸۰ دلار باشد و با این فرض که دو شرکت بازار را به‌طور مساوی بین خود تقسیم می‌کنند، ماتریس بازده زیر نمایش این بازی است.

| | | Boeing | |
|--------|--------------------------------|--------------------------|--------------------------------|
| | | X_2 : Enter the market | Y_2 : Keep out of the market |
| Airbus | X_1 : Enter the market | -10 | 0 |
| | Y_1 : Keep out of the market | 0 | 0 |

در این بازی دو تعادل نش وجود دارد که براساس آن یکی از شرکت‌ها به بازار وارد می‌شود و شرکت دیگر خارج از بازار می‌ماند. ماتریس بازده در این بازی به صورت زیر است.

| | | Boeing | |
|--------|--------------------------------|--------------------------|--------------------------------|
| | | X_2 : Enter the market | Y_2 : Keep out of the market |
| Airbus | X_1 : Enter the market | -10 | 0 |
| | Y_1 : Keep out of the market | 0 | 0 |

از تعادل‌های نش به صورت $S^* = (X_1, Y_2)$ و $S^* = (Y_1, X_2)$ می‌توان استنباط کرد که هیچ‌یک از این دو شرکت تا زمانی که شرکت رقیب به استراتژی خود پای‌بند است، نمی‌تواند بازده خود را بهبود بخشند.

توافقات بازار (بازی اوپک)

نمونه بازی توافقات بازار عبارت است از توافقات کشورهای عضو سازمان اوپک^۱ است. در این بازی دو کشور اوپک با یکدیگر توافق می‌کنند که تنها فروش حجم محدودی از نفت در بازار جهانی را پیشنهاد کنند تا بتوانند قیمت نفت را بالا نگاه دارند. با این توافق، هر عضو به فروش سالانه ۱۵ میلیارد دلار دست خواهد یافت. اگر یکی از این اعضا توافق صورت گرفته را زیر پا بگذارد، می‌توان انتظار داشت که فروش آن تا ۱۵ میلیون دلار افزایش یابد و عضو دیگر هیچ فروشی نخواهد داشت. در صورتی که هر دو عضو قرارداد را زیر پا بگذارند، به خاطر کاهش قیمت نفت در نتیجه اشباع بازار نفت هر دو کشور تنها ۵ میلیون دلار فروش خواهند داشت.

فرض کنید X_1 و X_2 هر کدام استراتژی‌های مربوط به پایبندی به قرارداد و Y_1 و Y_2 نیز استراتژی‌های مربوط به زیر پا گذاشتن قرارداد باشد. در این صورت ماتریس بازدهی بازی به صورت زیر است:

| | | Player 2 | |
|----------|-------|----------|-------|
| | | X_2 | Y_2 |
| Player 1 | X_1 | 10, 10 | 15, 0 |
| | Y_1 | 0, 5 | 5, 5 |

فرآیند بازی دارای یک تعادل نش با استراتژی خالص به صورت زیر است:

$$S^* = (Y_1, Y_2)$$

1 QPEC

این بدان معناست که هر دو عضو تمایل دارند که قرارداد را زیر پا بگذارند تا آنکه به آن عمل کنند، هر چند که هر دوی آنها در این تعادل نش در وضعیت بدتری قرار می‌گیرند. البته باید به یاد داشت که این تعادل، تعادلی ناپایدار خواهد بود؛ زیرا هر یک از اعضا انگیزه دارد که هنگام بالا بودن قیمت نفت، محصول خود را افزایش دهد. شرایط موجود در بازی اوپک به وضعیت بیان شده در معمای زندانی بسیار شبیه است.

اقتصاد منابع

یک نمونه دیگر در بازی‌های همزمان بازی اقتصاد منابع است. فرض کنید دو ماهیگیر و دو دریاچه وجود داشته باشند. در این بازی برای هر ماهیگیر این امکان وجود دارد که از میان دو دریاچه (دریاچه ۱ و دریاچه ۲)، یکی را برای ماهیگیری انتخاب کند. دریاچه اول دارای ۲۰ ماهی و دریاچه دوم دارای ۱۲ ماهی است. در صورتی که هر دو ماهیگیر دریاچه یکسانی را برای صید ماهی انتخاب کنند، تعداد ماهی‌های صید شده را میان خود به تساوی تقسیم خواهند کرد؛ اما اگر یکی از ماهیگیران یک دریاچه و ماهیگیر دیگر دریاچه درگری را برای صید ماهی انتخاب کنند، در این حالت هر کدام از ماهیگیران تمامی ماهی‌های صید شده از دریاچه محل صید خویش را از آن خود خواهند کرد.

ماتریس بازده این بازی به صورت زیر است:

| | | Angler 2 | |
|----------|----------------|----------------|----------------|
| | | X_2 : Lake 1 | Y_2 : Lake 2 |
| Angler 1 | X_1 : Lake 1 | 10 | 12 |
| | Y_1 : Lake 2 | 20 | 6 |

در این بازی هر یک از تعادل‌های نش حاوی استراتژی ماهیگیری در دو دریاچه متفاوت است. ارائه توزیعی به این شکل بدیهی و آشکار است و به این موضوع بستگی دارد که تفاوت میان ذخیره ماهی موجود در دو دریاچه بسیار زیاد نباشد. برای مثال، اگر تعداد ماهی موجود در دریاچه ۱ از ۲۰ به ۴۰ ماهی افزایش یابد، نتیجه این بازی را می‌توان با ماتریس بازده زیر نشان داد:

| | | Angler 2 | |
|----------|----------------|----------------|----------------|
| | | X_2 : Lake 1 | Y_2 : Lake 2 |
| Angler 1 | X_1 : Lake 1 | 20 | 12 |
| | Y_1 : Lake 2 | 20 | 6 |
| | | 40 | 6 |

به دلیل تغییر چارچوب بازی، تنها تعادل نش در این بازی استراتژی تقسیم ماهی موجود در دریاچه ۱ است.

بازی‌های سه نفره

در مثال بازی دو ماهیگیر و دو دریاچه (اقتصاد منابع) قبل لزومی ندارد که بازی حتما شامل تنها دو بازیکن باشد. اصولاً، وجود هر تعداد بازیکن در یک بازی امکان‌پذیر است، به‌عنوان مثال، هر تعداد ماهیگیر در می‌توانند دو دریاچه مورد بحث در مثال اقتصاد منابع را میان خود تقسیم کنند.

در ادامه بررسی به روشنی نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان تعادل‌های نش مربوط به یک بازی با حداقل سه بازیکن را تعیین کرد. در این حالت، یک بعد سوم نیز باید به ماتریس بازده برای بازیکن سوم اضافه شود.

برای اینکه بتوان هنوز هم بازی را در یک فضای دو بعدی نشان داد (بازی را باید در دو ماتریس دو بعدی جداگانه نمایش دهیم)^۱، بعد سوم را نمایش انتخاب استراتژی‌های مختلف بازیکن سوم است، در این دو ماتریس (در گوشه‌های پایین سمت راست خانه‌های مختلف)^۲ نشان داده می‌شود. در این دو ماتریس مانند قبل سطرهای ماتریس‌ها نمایش استراتژی‌های مختلف بازیکن اول و ستون‌های ماتریس‌ها نمایش استراتژی‌های مختلف بازیکن دوم است. البته همان‌طور که توضیح داده شد، مقدار بازده مربوط به بازیکن سوم در خانه‌های مختلف در گوشه‌های پایین سمت راست نشان داده می‌شود.

این بازی به وسیله بازی اقتصاد منابع قابل بررسی است. اکنون، فرض می‌کنیم سه ماهیگیر به دنبال چانه‌زنی بر سر صید در دو دریاچه موجود هستند. و همچنین فرض می‌کنیم که دریاچه ۱ دارای ۱۸ ماهی و دریاچه ۲ دارای ۱۲ ماهی است. این شرایط به صورت دو ماتریس بازده زیر نمایش داده می‌شود.

| | | Angler 2 | | | |
|----------|----------------|----------------|---|----------------|----|
| | | X_2 : Lake 1 | | Y_2 : Lake 2 | |
| Angler 1 | X_1 : Lake 1 | | 6 | | 12 |
| | Y_1 : Lake 2 | 6 | 6 | 9 | 9 |
| | | | 9 | | 6 |
| | | 12 | | 9 | 6 |
| | | | | | 18 |

| | | Angler 2 | | | |
|----------|----------------|----------------|----|----------------|---|
| | | X_2 : Lake 1 | | Y_2 : Lake 2 | |
| Angler 1 | X_1 : Lake 1 | | 9 | | 6 |
| | Y_1 : Lake 2 | 9 | 12 | 18 | 6 |
| | | | 18 | | 4 |
| | | 6 | | 6 | 4 |
| | | | | | 4 |

^۱ افزوده شده توسط مترجمان

^۲ افزوده شده توسط مترجمان

ماتریس اول

ماتریس دوم

بر اساس تعریف تعادل نش که «برای هیچ بازیکنی به‌صرفه نیست که تنها کسی باشد که از استراتژی خود منحرف می‌شود»، پیداست که در نهایت یک تعادل نش حاصل خواهد شد. برای مثال، در صورتی که به منظور صید ماهی بازیکن اول به سراغ دریاچه ۱ و بازیکن دوم نیز دریاچه ۱ را انتخاب کند، آنگاه بازیکن سوم در موقعیتی قرار می‌گیرد که از میان دریاچه ۱ (که سهم وی از صیادی در آن ۶ ماهی است) و دریاچه ۲ (که سهمش از آن ۱۲ ماهی است) یکی را انتخاب کند. از آنجا که طبیعتاً تملک ۱۲ ماهی بر تملک ۶ ماهی ترجیح دارد، عدد ۱۲ برای این بازیکن (در گوشه پایین سمت راست خانه اول ماتریس دوم) ثبت شده است. محاسبه به همین روش برای تمامی ترکیبات موجود انجام شده است. ماتریس‌های بازده زیر برای این بازی به‌صورت زیر است.

| | | Angler 2 | | | |
|----------|----------------|----------------|----|----------------|----|
| | | X_2 : Lake 1 | | Y_2 : Lake 2 | |
| Angler 1 | X_1 : Lake 1 | 6 | 12 | 6 | 9 |
| | Y_1 : Lake 2 | 6 | 9 | 9 | 6 |
| | | 12 | 9 | 6 | 18 |

| | | Angler 2 | | | |
|----------|----------------|----------------|----|----------------|----|
| | | X_2 : Lake 1 | | Y_2 : Lake 2 | |
| Angler 1 | X_1 : Lake 1 | 9 | 6 | 12 | 18 |
| | Y_1 : Lake 2 | 9 | 18 | 18 | 4 |
| | | 6 | 6 | 4 | 4 |

با توجه به تعریف، این بازی دارای سه تعادل نش با استراتژی خالص است.

تعادل‌های نش در ماتریس‌های بالا با رنگ تیره نشان داده شده است! این تعادل‌ها را

می‌توان به‌صورت زیر نشان داد.

$$S^* = (\text{دریاچه 1, دریاچه 2, دریاچه 1})$$

$$S^{**} = (\text{دریاچه 1, دریاچه 1, دریاچه 2})$$

$$S^{***} = (\text{دریاچه 2, دریاچه 1, دریاچه 1})$$

۳

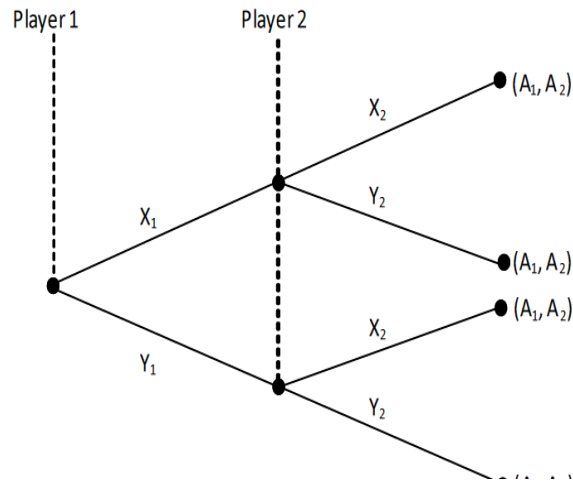
فصل سوم

بازی‌های متوالی

اصول

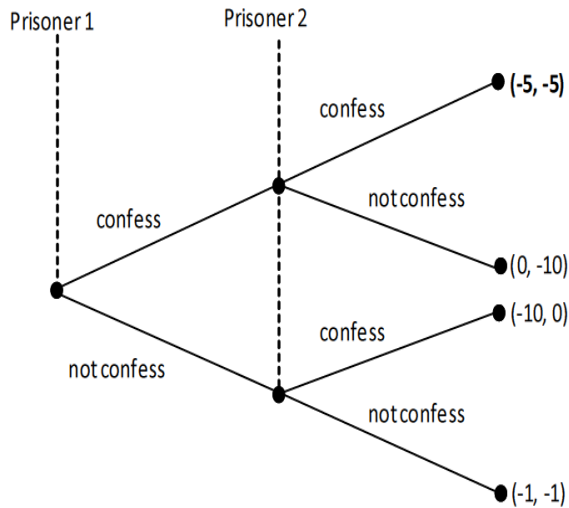
بر خلاف بازی‌های همزمان، بازی‌های متوالی (پی‌در پی)^۱ از این حقیقت سرچشمه می‌گیرند که انتخاب استراتژی‌ها در این بازی‌ها به صورت همزمان نیست، بلکه به صورت پیاپی و متوالی است. در این بازی‌ها هر بازیکن هنگام انجام دومین حرکت خود، استراتژی خود را با اطلاع از اولین حرکت خویش انتخاب می‌کند. از این رو، هر بازیکن می‌تواند حرکت دوم خود را بر اساس حرکت اولش تعیین کند. بازی‌های متوالی با عنوان بازی‌های با شکل گسترده^۲ نیز شناخته می‌شوند. برخلاف بازی‌های همزمان که به وسیله ابزار ماتریس نمایش داده می‌شوند، بازی‌های متوالی به وسیله درخت تصمیم‌گیری^۳ به تصویر در می‌آیند.

1 Sequential games
2 Extensive form
3 Decision tree



اگر در این بازی ابتدا بازیکن اول تصمیم‌گیری می‌کند، برای او این امکان وجود دارد که از میان دو استراتژی X_1 و Y_1 یک استراتژی را برگزیند. پس از انتخاب بازیکن اول، نوبت بازیکن دوم است که از میان استراتژی‌های X_2 و Y_2 یک کدام را انتخاب کند. با توجه به اینکه بازیکن اول کدام یک از استراتژی‌های پیش روی خود را انتخاب می‌کند، بازیکن دوم براساس انتخاب بازیکن اول، انتخاب خود را انجام می‌دهد. انتخاب او در درخت تصمیم‌گیری بر روی یک گره نشان داده می‌شود. از آنجا که بازیکنان از اطلاعات بازی آگاهی دارند، بازیکن دوم از همان ابتدای بازی می‌داند که در هر مرحله از بازی چه تصمیمی باید بگیرد. به این ترتیب، در نهایت درخت تصمیم‌گیری ایجاد شده نشان دهنده بازده حاصل از انجام مراحل مختلف بازی برای بازیکن اول و بازیکن دوم است.

بار دیگر از بازی معمای زندانی برای توضیح بازی متوالی استفاده می‌کنیم. این بار در بازی شکل گسترده فرض می‌کنیم که بازیکن اول در ابتدا بازی را آغاز و با توجه به شرایط تصمیم‌گیری می‌کند.



در صورتی که بازیکن اول اعتراف کند، بازیکن دوم نیز اعتراف خواهد کرد؛ زیرا در این حالت او نیز به جای ده سال، پنج سال به زندان محکوم خواهد شد. اگر بازیکن اول اعتراف نکند، بازهم بازیکن دوم اعتراف خواهد کرد؛ زیرا او در این صورت آزاد می‌شود. از آنجا که در این بازی از پیش بازیکن اول می‌دلند که بازیکن دوم چگونه عکس‌العمل نشان خواهد داد، بنابراین بازیکن اول دو گزینه در پیش‌روی خود دارد: یا اعتراف کند و به مجازات ۵ سال زندان محکوم شود و یا اینکه اعتراف نکند. در صورت اعتراف نکردن، او به مجازات ده سال زندان محکوم می‌شود، زیرا بازیکن دوم با در نظر گرفتن عدم اعتراف بازیکن اول، حتماً اعتراف خواهد کرد. بنابراین در این بازی نیز همانند بازی همزمان (که در پیش از این مورد بررسی قرار گرفت) هر دو بازیکن اعتراف خواهند کرد.

اصطلاحات

پس از این بررسی مختصر ساختار بازی‌های متوالی، برخی از اصطلاحات ضروری در این بخش معرفی می‌شوند.

گره تصمیم^۱ عبارت از هر موقعیت در بازی است که در آن موفقیت بازیکن می‌تواند یک تصمیم بگیرد. هر گره با یک نقطه (دایره پر) نشان داده می‌شود. به‌عنوان مثال، بازی معمای زندانی دارای سه گره تصمیم است که با سه نقطه نشان داده می‌شوند.

مسیر P نشان دهنده مسیر موجود از گره تصمیم اول به سوی هر گره دیگر با بازده مشخص است. مثلاً یک مسیر ممکن در معمای زندانی به‌صورت زیر می‌تواند باشد:

$P =$ (اعتراف نکردن، اعتراف نکردن)

که بازده حاصل از این مسیر نیز به‌صورت زیر است:

$$A(P) = (\text{اعتراف نکردن، اعتراف نکردن}) = (-1, -1)$$

یک بازیکن باید برای هر یک از این گره‌های تصمیم یک استراتژی خاص را دنبال کند. در معمای زندانی، بازیکن اول، در گره ۱، امکان انتخاب میان دو استراتژی «اعتراف کردن» و «اعتراف نکردن» را دارد. بنابراین، استراتژی وی می‌تواند به‌صورت زیر تعریف شود.

$S_1 =$ اعتراف کردن

زندانی دوم نیز دارای دو گره تصمیم است. به‌عنوان مثال، اگر وی در گره ۲ «اعتراف کردن» و در گره ۳ «اعتراف نکردن» را انتخاب کند، استراتژی‌های او به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

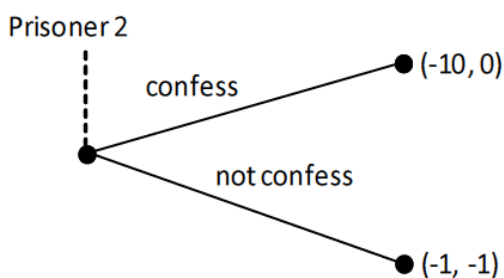
$S_1 =$ (اعتراف نکردن، اعتراف کردن)

و در این حالت استراتژی انتخاب شده برای کل بازی از سوی بازیکنان به‌صورت زیر است.

$$S = \left(\text{اعتراف نکردن, اعتراف کردن} \right), \left(\text{اعتراف کردن, اعتراف نکردن} \right)$$

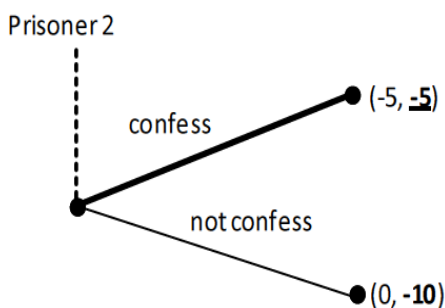
زیربازی‌ها و تعادل‌های کامل در زیربازی‌ها

زیربازی‌ها¹ عبارت از زیربازی‌هایی هستند که می‌توانند در هر گره تصمیمی آغاز شوند، به طوری که در هر بازی دقیقاً به تعداد گره‌های تصمیم، زیربازی وجود دارد. کل بازی نیز خود یک زیربازی است. مثلاً یک زیربازی برای معمای زندانی می‌تواند به صورت زیر تعریف شود.



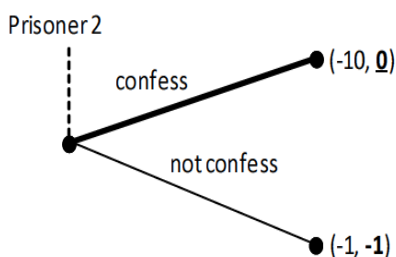
برای اینکه بدانیم در نقطه تعادل کدام استراتژی بازی شده است، بررسی خود را از اولین زیربازی شروع می‌کنیم. مسیر این زیربازی در هر گره تصمیم به گونه‌ای مشخص شده است که برای هر زیربازی دیگر انتخاب‌های ممکن معلوم است. درخت تصمیم همواره «از قسمت پشتی خود تا شده و محدب است». در مثال معمای زندانی اولین زیربازی به صورت زیر است:

¹ Sub games

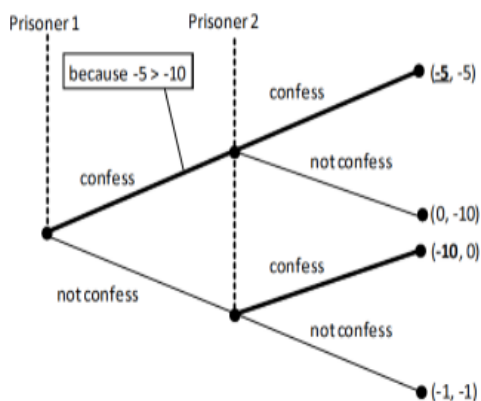


از آنجا که استراتژی تعادلی برای زندانی دوم در این زیربازی «اعتراف کردن» است، مسیر مناسب برای این زیربازی مشخص شده است.

این موضوع برای زیربازی دوم نیز تکرار شده است و در آن مسیر تعادلی مشخص شده است:



با انجام سومین زیربازی درخت تصمیم که در آن از قبل دو زیربازی دیگر علامت‌گذاری شده است، کامل می‌شود.



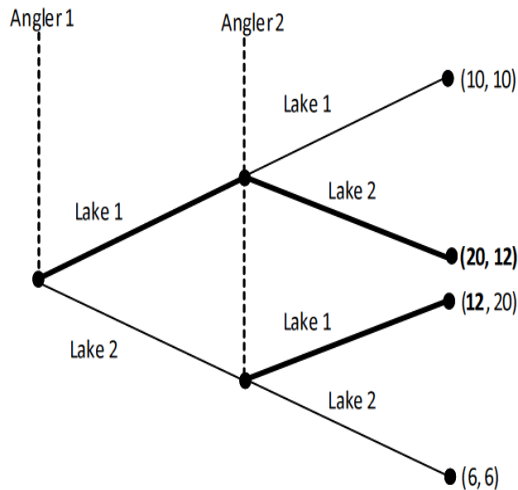
اگر بازیکن دوم در گره‌های ۲ و ۳، استراتژی اعتراف کردن را انتخاب کند، زندانی اول در گره ۱، می‌تولند از دو گزینه ۵ سال زندان، یعنی (اعتراف کردن) $S_1 = 10$ و ۱۰ سال زندان (اعتراف نکردن) $S_1 = 1$ ، یک کدام را انتخاب کند.

بنابراین زندانی اول در نقطه تعادل ۱ تصمیم می‌گیرد که استراتژی $(S_1 = \text{اعتراف کردن})$ را برگزیند. به استراتژی که در نقطه تعادل برای هر زیر بازی وجود دارد، تعادل کامل زیر بازی^۱ می‌گویند. تعادل‌های زیر بازی کامل خود تعادل‌های نش هستند. تعادل زیر بازی کامل در معمای زندانی به صورت زیر است:

(اعتراف کردن، اعتراف کردن)، (اعتراف کردن) $S_1 =$

تعادل‌های نش و بازی‌های متوالی که به صورت همزمان بازی می‌شوند.

بازی‌های متوالی را می‌توان به صورت بازی‌های همزمان نیز مدل‌سازی ارائه کرد. این ویژگی را می‌توان با مثال مربوط به ماهیگیران و تقسیم دریاچه‌ها به خوبی نشان داد. فرض کنیم که ابتدا ماهیگیر اول تصمیم‌گیری می‌کند:



1 Sub game perfect equilibrium

این بازی دارای تعادل زیربازی کامل به صورت $S^* = \left(\text{دریاچه 2, دریاچه 1} \right)$ است. در این بازی ماهیگیر اول تصمیم می‌گیرد که دریاچه ۱ را برای صید انتخاب کند، ماهیگیر دوم دریاچه ۲ را برای صید ماهی انتخاب می‌کند.

ماهیگیر دوم دو استراتژی برای انتخاب کردن در اختیار دارد: انتخاب دریاچه ۱ یا دریاچه ۲. اما ماهیگیر دوم چهار انتخاب را پیش روی خود دارد؛ زیرا وی برای دو گره تصمیم باید یک انتخاب انجام دهد. استراتژی‌های قابل انتخاب ماهیگیر دوم عبارتند از:

- (دریاچه ۱، دریاچه ۱)
- (دریاچه ۱، دریاچه ۲)
- (دریاچه ۲، دریاچه ۱)
- (دریاچه ۲، دریاچه ۲)

با در دست داشتن این اطلاعات بازی همزمان مربوط به این بازی را می‌توان به صورت زیر نیز مدل‌سازی کرد:

| | | Player 2 | | | |
|----------|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | | Lake 1; Lake 1 | Lake 1; Lake 2 | Lake 2; Lake 1 | Lake 2; Lake 2 |
| Player 1 | Lake 1 | 10 | 10 | 12 | 12 |
| | Lake 2 | 10 | 20 | 20 | 6 |
| | | Lake 1 | Lake 2 | Lake 1 | Lake 2 |
| | | 20 | 6 | 20 | 6 |
| | | Lake 1 | Lake 2 | Lake 1 | Lake 2 |
| | | 12 | 6 | 12 | 6 |

این بازی کلاً دارای سه تعادل نش به صورت زیر است:

$$S^* = \left(\text{دریاچه 1, دریاچه 2} \right)$$

$$S^{**} = \left(\text{دریاچه 2, دریاچه 1} \right)$$

$$S^{***} = \left(\text{دریاچه 1, دریاچه 1} \right), \left(\text{دریاچه 2} \right)$$

تبادل نش S^* را می‌توان یک تبادل زیربازی نش نیز دانست. همان‌طور که در این مثال نشان داده شد، هر تبادل نش را نمی‌توان یک تبادل زیربازی کامل دانست. البته هر تبادل زیربازی نش یک تبادل نش نیز هست.

چگونه می‌توان تبادل‌های نش در بازی‌های متوالی را نمایش داد؟ برای پاسخ به این پرسش، تعریف تبادل نش را یادآوری می‌کنیم. بنا به تعریف، در تبادل نش هیچ بازیکنی انگیزه ندارد که یک‌طرفه از استراتژی تعادلی دور شود. این معیار را مثلاً برای تبادل S^{***} که یک تبادل نش است، بررسی می‌کنیم. به‌وضوح می‌توان دید که تبادل S^{***} یک تبادل زیربازی کامل است.

در تبادل S^{***} بازیکن اول صیادی در دریاچه ۲ را انتخاب می‌کند و بازیکن دوم دریاچه ۱ را برای ماهیگیری انتخاب می‌کند. در نتیجه این انتخاب‌ها کار بازیکن اول، ۱۲ ماهی و بازیکن دوم، ۲۰ ماهی صید می‌کنند.

اکنون سؤال پیش رو این است که چه اتفاقی اگر یکی از این دو بازیکن به تنهایی از نقطه تبادل دور شود، چه اتفاقی خواهد افتاد؟ اگر فرض کنیم که بازیکن اول به‌جای دریاچه ۱ دریاچه ۲ را انتخاب کند. بازیکن دوم استراتژی خود را تغییر ندهد و برای ماهیگیری دریاچه ۲ را انتخاب کند، در این صورت بازیکن اول از استراتژی منتخب خود تنها ۱۰ ماهی به‌دست خواهد آورد. بنابراین همان‌طور که گفته شد، بازیکن اول دیگر انگیزه‌ای ندارد که به‌طور یک‌طرفه از نقطه تبادل دور شود. حال فرض کنیم که بازیکن دوم استراتژی خود را تغییر دهد. برای این منظور بازیکن دوم دو امکان پیش روی خود دارد. او می‌تواند در گره ۲ و گره ۳ دریاچه ۲ را انتخاب کند. تحلیل این وضعیت را از گره ۳ آغاز می‌کنیم. اگر در این گره بازیکن دوم تصمیم بگیرد که دریاچه ۲ را انتخاب

کند، در این حالت با انتخاب این استراتژی به جای ۲۰ ماهی مورد انتظار در تعادل S^{***} تنها ۶ ماهی به دست خواهد آورد. در صورتی که بازیکن دوم در گره ۲ نیز دریاچه ۲ را انتخاب کند، در ابتدای کار اتفاق خاصی نخواهد افتاد؛ زیرا در این حالت بازیکن اول در نقطه تعادل S^{***} در گره ۱ تصمیم می‌گیرد که دریاچه ۲ را انتخاب کند و به جای گره ۲ در گره ۳ این تصمیم را گرفته می‌شود.

البته از آنجا که بازیکن اول دریاچه ۱ را انتخاب نمی‌کند، این استراتژی جدید، یک استراتژی ناپایدار است (و در نوع خود پاسخ بهینه نیست). به همین علت می‌توان گفت که نقطه S^{***} یک تعادل نش است.

مزیت اولین حرکت (FMA)

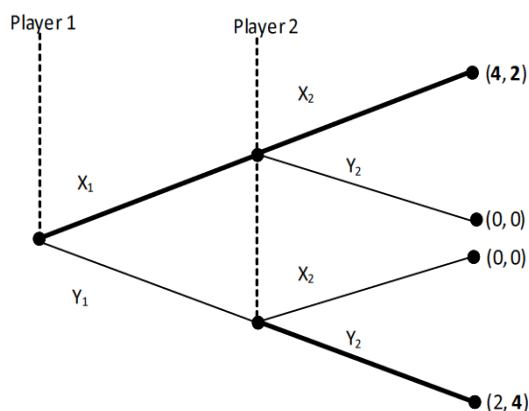
می‌توان به آسانی درک کرد که در بعضی از بازی‌ها بازیکنی که بازی را شروع می‌کند و حرکت اول را انجام می‌دهد، نسبت به بازیکن دیگری که در مقابل عکس‌العمل نشان می‌دهد، از مزیت برخوردار است، بازیکنی که امکان انجام اولین تصمیم‌گیری برای وی وجود دارد، دارای مزیت اولین حرکت^۱ (FMA) است.

معمای زندانی دارای مزیت اولین حرکت نیست. هر تصمیمی که گرفته شود، هر دو زندانی به مدت ۵ سال به زندان محکوم می‌شوند، چه بازی به صورت متوالی، چه به صورت همزمان صورت بگیرد. برای اینکه بررسی کنیم که مزیت اولین حرکت در یک بازی چگونه است، به مثال زیر توجه کنید.

1 First Mover's Advantage

| | | Player 2 | |
|----------|------------|----------|------------|
| | | $X_2(q)$ | $Y_2(1-q)$ |
| Player 1 | $X_1(p)$ | 4, 2 | 0, 0 |
| | $Y_1(1-p)$ | 0, 0 | 0, 4 |

این بازی را باید به صورت یک بازی متوالی در نظر گرفت که در آن بازیکن اول اولین حرکت را انجام می‌دهد.



در تعادل زیربازی کامل بازده بازیکن اول ۴ و بازده بازیکن دوم ۲ است. اگر بازیکن دوم، بازیکنی بود که حرکت اول را انجام می‌داد، او می‌توانست بازده ۴ را به دست آورد و بازیکن دوم نیز تنها به بازده ۲ دست می‌یافت. بنابراین، بازیکنی که در این بازی می‌تواند اولین تصمیم‌گیری را انجام دهد، دارای مزیت اولین حرکت نیز هست و در نتیجه این بازی، یک بازی FMA است.

یک مثال: بحران کوبا

جنگ هسته‌ای در سال ۱۹۶۴ به پایان رسید. اتحاد جماهیر شوروی به رهبری خروشچف،^۱ می‌خواست که در کوبا پایگاه اتمی مستقر کند. امریکا، در زمان ریاست جمهوری کندی،^۲ تهدید کرد که به شوروی حمله می‌کند. در آخرین دقایق تا وقوع حمله اتمی، شوروی تصمیم گرفت که حمله اتمی را متوقف کند. این وضعیت را می‌توان به صورت یک بازی که در آن هم ویژگی بازی متوالی و هم ویژگی بازی همزمان وجود دارد، مدل‌سازی کرد.

شوروی، امریکا را تحریک می‌کرد و به دشمنی خود با امریکا دامن می‌زد. در این شرایط، امریکا دو امکان را در پیش روی خود داشت که به صورت زیر تعریف می‌شود.

- تهدیدهای شوروی را نادیده بگیرد (I) و هر دو کشور بازده صفر از این بازی دریافت کنند.

- اجازه دهد که شرایط بدتر و وخیم‌تر شود.

اگر امریکا اجازه دهد که رابطه بین دو کشور وخیم‌تر شود، کشور روسیه نیز می‌تواند یکی از استراتژی‌های زیر را انتخاب کند.

- عقب‌نشینی کند (R) که در این صورت امریکا در این نزاع پیروز می‌شود و بازده ۱ را دریافت می‌کند و شوروی شکست می‌خورد و بازده ۱- را به دست می‌آورد.

- شوروی نیز اجازه دهد که این تنش و بحران وخیم‌تر شود.

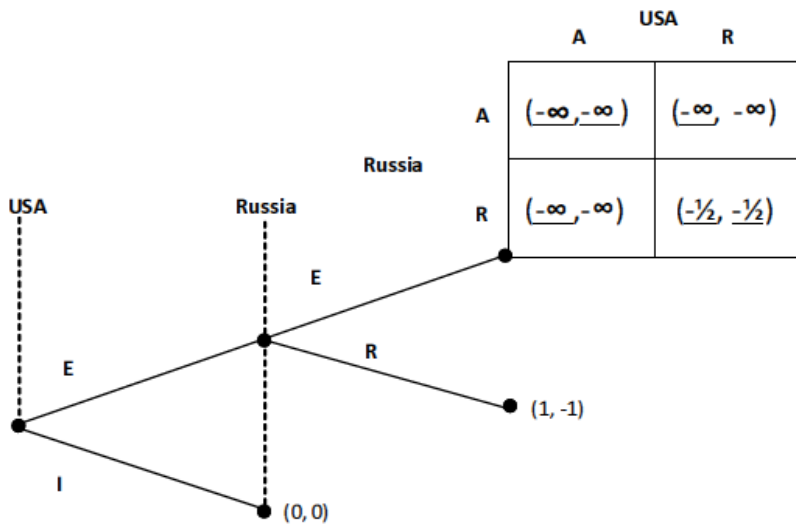
در صورتی که هر دو کشور اجازه دهند که این بحران وخیم‌تر شود، آنگاه آنها باید به طور همزمان انتخاب کنند که آیا می‌خواهند جنگ اتمی را آغاز کنند (A) یا عقب‌نشینی

1 Khorushchev

2 Kennedy

(R) نمایند. به محض اینکه یک کشور تصمیم به جنگ هسته‌ای بگیرد، بازده حاصل از این بازی برای دو کشور برابر با $-\infty$ خواهد بود. اگر هر دو کشور عقب نشینی کنند، هر دو شکست خود را در این نزاع می‌پذیرند و بازده هر کدام $-\frac{1}{2}$ خواهد بود. از آنجا که یک شکست دوطرفه قابل تحمل‌تر از یک شکست صرف و یک‌طرفه است، بازده $-\frac{1}{2}$ دارای اثر منفی کمتری نسبت به حالت شکست یک‌طرفه و بازدهی -1 است.

این وضعیت را می‌توان به صورت زیر مدل‌سازی کرد.



در نظریه بازی تحلیل بازی با بررسی آخرین تصمیم گرفته شده در بازی آغاز شود.

در قسمت همزمان این بازی، دو تعادل نش وجود دارد که به صورت زیر هستند.

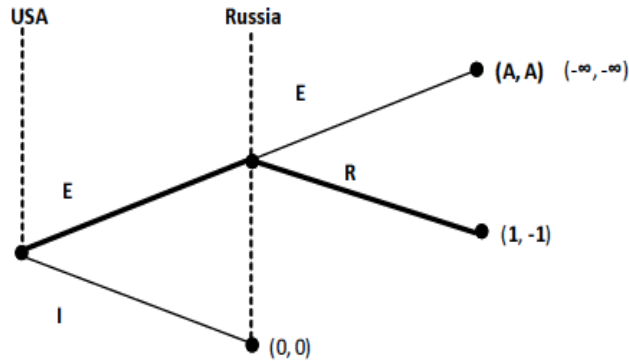
$$S^* = (A, A)$$

$$S^{**} = (R, R)$$

از آنجا که نمی‌دانیم کدام‌یک از این تعادل‌های نش بازی خواهد شد، باید هر دو

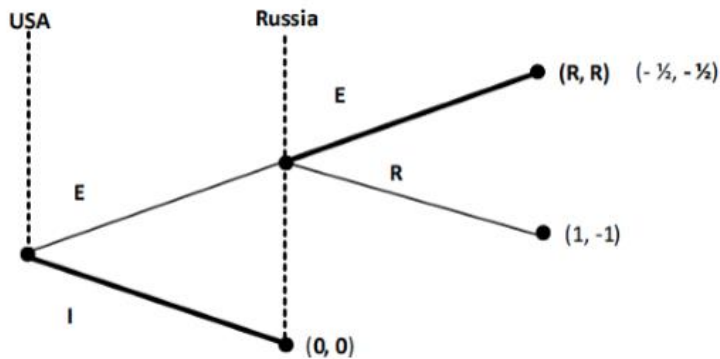
استراتژی ممکن را در نظر گرفت. فرض کنید که در ابتدا اولین تعادل نش یعنی

$S^* = (A, A)$ بازی شود. نتیجه انتخاب این استراتژی انجام بازی متوالی زیر است.



در این وضعیت، امریکا اجازه می‌دهد که شرایط وخیم‌تر شود و شوروی را تهدید به جنگ هسته‌ای می‌کند، امریکا با دنبال کردن این استراتژی، شوروی عقب‌نشینی می‌کند و بنابراین جنگی به وقوع نخواهد پیوست.

فرض کنید که دومین تعادل نش، یعنی $S^{**} = (R, R)$ به صورت یک بازی همزمان توسط دو کشور بازی شود. در نتیجه این اقدام، بازی متوالی زیر شکل می‌گیرد.



در این شرایط امریکا از همان ابتدای نزاع از تشدید اختلافات احتراز می‌کند و در نتیجه هیچ‌گونه جنگی به وقوع نخواهد پیوست. بازده هر دو کشور امریکا و شوروی از انجام این بازی صفر است که به معنای رسیدن به صلح بدون هر گونه تلاش اضافی است.

با بررسی دقیق‌تر قسمت بازی همزمان می‌توان دریافت که برای هر بازیکن یک استراتژی غالب وجود دارد و آن استراتژی عقب‌نشینی است. به همین دلیل می‌توانیم فرض کرد که در نهایت تعادل نش دوم یعنی $S^{**} = (R, R)$ ، بازی می‌شود؛ زیرا این یک تعادل اکید نش است.

۴

فصل چهارم

چانه زنی
(بازی های همکارانه)

اصول

بعد از ارائه و معرفی بازی‌های غیرهمکارانه در فصل‌های دوم و سوم، در این فصل نگاه مختصری به بازی‌های همکارانه می‌اندازیم. در بازی‌های غیرهمکارانه هر بازیکن تلاش می‌کند که بدون توجه به منافع حریف، منفعت و سود خود را حداکثر کند؛ اما در بازی‌های همکارانه (چانه‌زنی) بازیکنان با یکدیگر همدست شده، تلاش می‌کنند که منافع مشترک خود را به حداکثر برسانند. در این حالت حریفان حاضر در یک بازی با یکدیگر همکاری می‌شوند. مسأله چانه‌زنی در نظریه بازی، براساس این حقیقت است که بازیکنان حاضر در بازی دارای منافع مشترکی هستند، اما اهداف متفاوتی را دنبال می‌کنند. به عنوان مثال، در توزیع مشترک قطعات یک کیک، بازیکنان در ابتدا باید با هم همکاری کنند که کیک فقط در میان آنها توزیع شود و البته از طرفی دیگر، هر بازیکن تلاش می‌کند به از طریق چانه‌زنی، تا آنجا که ممکن است، قطعه بزرگتری از کیک را به خود اختصاص دهد.

هدف چانه‌زنی، از یک سو، همکاری و همدستی شرکت کنندگان در بازی همکارانه است به منظور افزایش منفعت مجموع بازیکنان نسبت به منفعت حاصل از انجام یک بازی غیرهمکارانه است. از طرفی دیگر، بازیکنان به دنبال آن هستند که مجموع منفعت حاصل تا آنجا که امکان داشته باشد، به صورت مساوی میان بازیکنان تقسیم شود.

تبانی

منظور از تبانی^۱ در حقیقت سازش و ترکیب چند بازیکن برای همکاری با یکدیگر است. یک تبانی ممکن است در نتیجه ترکیب کل بازیکنان حاضر در بازی یا زیرمجموعه‌ای از این بازیکنان به وجود آید.

فرض کنید تبانی K از همکاری تعداد مشخصی بازیکنان حاضر در مجموعه N به دست آمده باشد. فرض کنید که مثال زیر این تبانی را به خوبی مشخص می‌کند. پنج مزرعه کشاورزی در یک منطقه وجود داشته باشند که از میان آنها مزرعه‌های ۱، ۴ و ۵ با یکدیگر همکاری کنند تا بتوانند سود خود را افزایش دهند. از این ترکیب بازی تبانی شکل می‌گیرد و مجموعه کل بازیکنان و مجموعه تبانی این بازی به صورت زیر است.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{مجموعه بازیکنان}$$

$$K = \{1, 4, 5\} \quad \text{مجموعه تبانی}$$

اگر مجموعه بازیکنان یک تبانی تنها شامل یک عنصر باشد، آن تبانی را تبانی یک نفری^۲ و اگر تمامی بازیکنان یک بازی در یک تبانی حضور داشته باشند، آن تبانی را تبانی همگانی^۳ نامند.

تابع خصوصیت

بازده مشترک برای یک تبانی به صورت تابع خصوصیت^۴ $v(K)$ تعریف می‌شود. این تابع در تجزیه و تحلیل یک بازی دارای اهمیت بسیار ویژه‌ای است؛ زیرا با توجه به یک تابع خصوصیت می‌توان تعیین کرد که کدام یک از انواع تبانی در مقایسه با استراتژی‌های

1 Coalition

2 One coalition

3 All coalition

4 Characteristic function

بازی غیرهمکارانه منافع و مزایای بیشتری را به همراه دارد و کدام یک از انواع تباری می‌تواند بیشترین منفعت را برای بازیکنان تباری کننده به همراه داشته باشد. به این مثال توجه کنید. فرض کنید که مجموعه بازیکنان به صورت $N = \{1, 2, 3\}$ باشد. مقدار تابع خصوصیت $v(K)$ برای این بازی برای هر یک از تباری‌های ممکن به صورت زیر است:

| Coalition K | $v(K)$ |
|-------------|--------|
| { 1 } | \$10 |
| { 2 } | \$10 |
| { 3 } | \$15 |
| { 1, 2 } | \$25 |
| { 1, 3 } | \$25 |
| { 2, 3 } | \$30 |
| { 1, 2, 3 } | \$40 |

در صورتی که بازیکنان اول و دوم اقدام به تباری کنند، می‌توانند با هم ۵ دلار بیشتر از تباری یک نفره به دست آورند. این ارزش افزوده (VA) را می‌توان از طریق محاسبه اختلاف میان مقادیر به دست آمده از تابع خصوصیت به صورت زیر تعیین کرد:

$$VA \{1, 2\} = V(\{1, 2\}) - (V(\{1\}) + V(\{2\})) = 25\$ - 10\$ - 10\$ = 5\$$$

قاعده مشابهی نیز برای تباری بین بازیکن دوم و سوم وجود دارد. اگر این دو بازیکن با هم تباری کنند، به طور مشترک مقدار ۵ دلار اضافی را به دست خواهند آورد (۳۰ دلار به جای ۲۵ دلار). در تباری همگانی نیز در مجموع به اندازه ۵ دلار منفعت بیشتر در مقایسه با حاصل جمع منفعت تک تک بازیکنان حاصل می‌شود. (۴۰ دلار به جای ۳۵

¹ Value Added

دلار). تنها تبانی میان بازیکنان اول و سوم است که هیچ‌گونه سود اضافی را در پی نخواهد داشت و در هر دو حالت بازیکنان تبانی کننده تنها ۲۵ دلار دریافت می‌کنند.

اما سوال پیش‌رو این است که کدام‌یک از انواع تبانی قابل تحقق است و تا چه اندازه در مقابل انواع «سازش‌های غیرقانونی^۱» که از سوی بازیکنانی خارج از تبانی شکل می‌گیرند، پایدار است؟

از آنجا که بازیکنان اول و سوم با تبانی کردن مقدار سودی بیشتری از حالت عادی به دست نمی‌آورند، به بازیکن دوم وابسته می‌شوند. بازیکن دوم می‌تواند شریک بازی خود در تبانی را انتخاب کند. در صورتی که تبانی بین همه بازیکنان شکل بگیرد، با این تبانی همگانی، هیچ‌یک از بازیکنان در مقایسه با حالتی که بازیکن اول یا سوم با بازیکن دوم تبانی کنند، مقدار بیشتری را به دست نخواهند آورد؛ از طرف دیگر در صورتی که مقدار بیشتری نیز از تبانی همگانی به دست آید، این مقدار اضافی باید میان تعداد بازیکنان بیشتری تقسیم شود. در نتیجه، بازیکن دوم، با بازیکن اول یا بازیکن سوم تبانی خواهد کرد. بازیکن دوم تصمیم می‌گیرد با بازیکنی تبانی کند که از تبانی با او در زمان چانه‌زنی بتواند مقدار بیشتری از ۵ دلار به دست آمده را از آن خود کند.

به همین دلیل هر یک از دو بازیکن اول و سوم تقاضای سود کمتری به ازای تبانی با بازیکن دوم دارد و کمترین مقدار ممکن از ۵ دلار ارزش افزوده را به‌عنوان سهم خود طلب می‌کند تا بتواند از سوی بازیکن دوم به‌عنوان شریک تبانی انتخاب شود؛ زیرا در صورت تبانی، کسب کمترین مقدار ممکن از ۵ دلار حاصل از تبانی با بازیکن دوم، از بازده حاصل از تبانی تک‌نفری بیشتر است.

1 Attempted poaching

بازی کیک

در بازی کیک^۱، چندین بازیکن به دنبال تقسیم کردن یک کیک هستند. در مثالی که در ادامه می‌آید، سه بازیکن می‌خواهند کیک را میان خود تقسیم کنند. در این حالت تبانی دو بازیکن با یکدیگر باعث شکل‌گیری «اکثریت» می‌شود و این اکثریت می‌تواند بدون هیچ‌گونه توافقی با بازیکن سوم اقدام به تقسیم کردن کیک کند. این مثال برای این است تا نشان دهیم که در همه بازی‌ها یک تبانی پایدار شکل نمی‌گیرد. برای رسیدن به یک راه‌حل، در ابتدا و در مرحله اول فرض می‌کنیم که یکی از بازیکنان این ایده را در ذهن خود دارد که همه بازیکنان کیک را به صورت «مساوی» میان خود تقسیم کنند و هر کدام از آن‌ها یک سوم از کیک را از آن خود کنند. یک مرحله به مراحل قبلی ترجیح داده می‌شود، اگر دو نفر از این سه بازیکن بتوانند وضعیت خود را بهبود بخشند و بتوانند یک تبانی را با اکثریت بازیکنان تشکیل دهند. در جدول زیر بر اساس این که وضعیت بازیکن مورد نظر بهبود یافته یا بدتر می‌شود، یک علامت + یا منفی - میان مراحل مختلف آن قرار داده شده است.

| توضیحات | سهم هر بازیکن | | |
|---|---------------|-----|-----|
| | سوم | دوم | اول |
| بازیکن سوم این ایده را در سر دارد که کیک به‌گونه‌ای تقسیم شود که هر بازیکن $\frac{1}{3}$ آن را به‌دست آورد. | ۳۳٪ | ۳۳٪ | ۳۳٪ |
| بازیکن اول و دوم ایده دیگری دارند و یک تبانی شکل می‌دهند که در آن هر کدام نصف کیک را به دست آورند و بازیکن سوم هیچ سهمی از کیک دریافت نکند. | ۰٪ | ۵۰٪ | ۵۰٪ |

1 Cake game

| | | | |
|---|-----|-----|-----|
| از آنجا که بازیکن سوم نیز مایل به تصاحب بخشی از کیک هست، او نیز ایده دیگری در سر می‌پروراند و به بازیکن اول سهم ۷۵ درصد از کیک را پیشنهاد می‌دهد که ۲۵ درصد نیز سهم وی خواهد بود. در این حالت، هر دو بازیکن بیشتر از حالت دوم کیک به دست خواهند آورد. | ۲۵٪ | ۰٪ | ۷۵٪ |
| از آنجا که بازیکن دوم در حالت قبل چیزی به دست نمی‌آورد، به بازیکن سوم پیشنهاد سهم ۵۰ درصد از کیک را می‌دهد. در این حالت بازیکن دوم نیز ۵۰ درصد از کیک را دریافت خواهد کرد و بازیکن اول هیچ سهمی از کیک دریافت نخواهد کرد. | ۵۰٪ | ۵۰٪ | ۰٪ |

همان‌طور که جدول نشان می‌دهد، تقسیم انجام شده در مرحله دوم با تقسیم انجام شده در مرحله چهارم (که در آن هر کدام از دو بازیکن نصف کیک را از آن خود خواهند کرد و بازیکن سوم چیزی دریافت نخواهد کرد.) متفاوت است و این بازی دارای یک راه‌حل پایدار نیست؛ زیرا برای هر راه‌حل ارائه شده راه‌حل بهتری نیز وجود دارد؛ یعنی بر هر راه‌حل، راه‌حل دیگری حاکم است.

چانه‌زنی بین دو بازیکن

در چانه‌زنی میان دو بازیکن باید توافق شود که سود مشترک حاصل از تباری باید به چه نسبتی میان دو نفر تقسیم شود. در ادامه مثال زیر نشان می‌دهد که چنین تقسیم منافی بین بازیکنان چگونه صورت می‌گیرد.

دو شریک چانه‌زنی با نام‌های رنه^۱ (بازیکن اول) و جنی^۲ (بازیکن دوم) یک جواهر را در شهر رستوک^۳ خریداری کردند. رنه یک سهم ۲۰۰۰ مارکی و جنی سهم ۴۰۰۰ مارکی از قیمت این جواهر را پرداخته‌اند. آنها این جواهر را در شهر مونیخ به قیمت ۱۰۰۰۰ مارک به فروش می‌رسانند و از انجام این کار به سود مشترک ۴۰۰۰ مارک دست می‌یابند. اکنون سوال این است که چگونه این سود را میان خود تقسیم می‌کنند؟

پارامترها و محدودیت‌های زیر برای این بازی وجود دارند:

- فرض کنیم که ۱۰۰۰۰ مارک قیمت فروش این جواهر در مونیخ باشد.
- هیچ یک از این دو نفر نمی‌خواهد که پس از فروش جواهر، کمتر از مقداری که برای خرید آن پرداخت کرده‌اند، به‌دست آورد. به‌عنوان مثال، رنه حداقل ۲۰۰۰ مارک و جنی حداقل ۴۰۰۰ مارک می‌خواهند. ما این نقاط را نقاط تهدید^۴ می‌نامیم. این بازی دارای دو نقطه تهدید است.

$$d_1 = 2000$$

$$d_2 = 4000$$

- فرض کنید که پس از تقسیم سود، سهم به‌دست آمده برای رنه u_1 و برای جنی u_2 باشد.

- محدودیت $u_1 + u_2 = 10,000$ نیز برای این بازی وجود دارد که در آن مجموع مبلغ کل باید بین رنه و جنی تقسیم شود.

برای حل این مسأله، روش زیر را که راه‌حل نش نامیده می‌شود، به‌کار می‌گیریم که در آن تابع هدف نسبت به قیدهای موجود حداکثر می‌شود.

1 Rene
2 Jenny
3 Rostock
4 Threat Point

$$\max(u_1 - d_1) \cdot (u_2 - d_2)$$

$$s. t. \quad p - u_1 - u_2 = 0$$

توجه داشته باشید که در این روش قید باید به شکلی تغییر داده شود که عدد صفر در سمت راست معادله قرار گیرد.

برای حل مسئله بهینه‌سازی مقید بالا یک تابع لاگرانژ با نام L به صورت زیر تشکیل می‌شود.

$$L = \text{تابع ماکزیمم شونده} + \lambda (\text{قید})$$

$$\lambda = (u_1 - d_1) \cdot (u_2 - d_2) + \lambda(p - u_1 - u_2)$$

برای رسیدن به جواب بهینه باید از تابع L نسبت به u_1 ، u_2 و λ دیفرانسیل گرفت و مشتقات را برابر با صفر قرار داد. اگر از تابع لاگرانژ نسبت به u_1 دیفرانسیل بگیریم، معادله زیر به دست می‌آید.

$$u_2 - d_2 - \lambda = 0$$

با قرار دادن 4000 به جای d_2 در معادله بالا، معادله زیر حاصل می‌شود.

$$u_2 - 4000 - \lambda = 0 \quad (1)$$

با دیفرانسیل‌گیری از تابع لاگرانژ نسبت به u_2 معادله زیر به دست می‌آید.

$$u_1 - d_1 - \lambda = 0$$

با قرار دادن 2000 به جای d_1 معادله زیر حاصل می‌شود.

$$u_1 - 2000 - \lambda = 0 \quad (2)$$

با دیفرانسیل‌گیری نسبت به λ معادله زیر به دست می‌آید.

$$p - u_1 - u_2 = 0$$

با قرار دادن 1000 به جای p معادله زیر حاصل می‌شود.

$$1000 - u_1 - u_2 = 0 \quad (3)$$

از حل سه معادله اخیر نسبت به سه مجهول u_1 ، u_2 و λ می‌توان برای هر یک از متغیرها یک مقدار عددی به دست آورد. بنابراین، نتیجه تقسیم سود u_1 و u_2 به صورت جواب‌های بهینه زیر است.^۱

$$u_1^* = 4000$$

$$u_2^* = 6000$$

بر اساس تعادل نش، رنه از عایدات فروش ۴۰۰۰ مارک و جنی ۶۰۰۰ مارک دریافت کرده‌اند. نتیجه به دست آمده نشان می‌دهد که هر یک از این دو شریک سود یکسانی برابر با ۲۰۰۰ مارک دریافت کرده‌اند. این نتیجه عادلانه نیست؛ زیرا رنه بازده بیشتری نسبت به پولی که سرمایه‌گذاری کرده، به دست آورده است.

تمایز بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه

از آنجا که مبحث بازی‌های غیرهمکارانه در فصل‌های دوم و سوم مورد بررسی قرار گرفت، در این فصل مرور مختصری بر بعضی از جنبه‌های بازی‌های همکارانه می‌شود. در بازی‌های همکارانه سؤال پیش روی این است: کدام تبانی‌ها چه سودی را در پی خواهند داشت و سود مشترک در میان اعضای تبانی کننده با چه نسبتی تقسیم می‌شود؟ البته دو نوع بازی همکارانه و غیرهمکارانه بر اساس نوع سؤالاتشان نیز با یکدیگر تفاوت دارند.

در بازی‌های همکارانه سؤال اصلی این است که کدام تبانی چه مقدار سود را در پی خواهد داشت و چگونه سود مشترک در میان اعضای تبانی تقسیم شود. در مقابل، در بازی‌های غیرهمکارانه سؤال اصلی این است که بازیکنان باید کدام استراتژی را دنبال کنند و تعادل آن بازی در چه نقطه‌ای اتفاق می‌افتد (حتی اگر بتوان راه‌حل تعادلی را در قالب ساختار یک بازی همکارانه نیز بیان کرد).

^۱ علامت * نمایش مقادیر بهینه است.

استراتژی‌ها در بازی‌های همکارانه بدین صورت نیست که این یا آن استراتژی را انجام دهند، بلکه در بازی‌های همکارانه افراد به دنبال آن هستند که بدانند با کدام یک از بازیکنان باید تباری کنند و از این تباری چه چیزی عاید آنها خواهد شد.



فصل پنجم

تصمیم‌گیری در شرایط نااطمینانی

نااطمینانی در مدل سازی

در نظریه بازی زمانی نااطمینانی وجود دارد که بازیکن ندانند که از انجام یک بازی چه انتظاری باید داشته باشد. در نظریه نااطمینانی اقتصادی، این نااطمینانی را با استفاده از بازی بخت آزمایی^۱ مدل سازی می کنند که در آن نتایج و بازده حاصل از بازی به کمک احتمالات بیان شده و بر اساس نتایج بازده مورد انتظار^۲ تجزیه و تحلیل می شود. هر بازیکن معمولاً در این بازی امکان دارد که از میان چندین بخت آزمایی مختلف یکی را انتخاب کند. سود یا بازده حاصل از بخت آزمایی در بیشتر اوقات با حرف x نشان داده می شود و بازده های ممکن با استفاده از مجموعه $X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ با احتمالات $\{p_1, p_2 \dots p_n\}$ تعریف می شود.

بازده مورد انتظار برای تمامی بازده های حاصل از بازی نیز با $E(X)$ نشان داده می شود. بخت آزمایی زیر را می توان به عنوان مثال برای درک بهتر موضوع در نظر گرفت.

یک بازیکن با احتمال ۵۰ درصد دو میلیون یورو را از شرکت در بخت آزمایی به دست می آورد و به احتمال بیش از ۵۰ درصد چیزی از این بازی عایدش نخواهد شد. بنابراین، بازده وی برابر با ۲ میلیون یورو با احتمال $p = 0.5$ و صفر یورو با احتمال $1 - p = 0.5$ است.

$$x_1 = 2000000, p = 0.5$$

1 Lotteries

2 Expected payoffs results

$$x_2 = 0, 1 - p = 0.5$$

بازده مورد انتظار از شرکت در این بخت‌آزمایی به صورت زیر است:

$$E(X) = x_1(p) + x_2(1 - p)$$

$$E(X) = 2000000 (0.5) + 0 (0.5)$$

بنابراین این بازیکن دارای بازده مورد انتظار ۱ میلیون یورو است.

اگر مثال زیر به عنوان بخت‌آزمایی دوم در نظر گرفته شود، در این حالت این بازیکن ۱ میلیون یورو را به عنوان بازده قطعی (با احتمال یک) دریافت می‌کند.

$$x_1 = 1000000 \text{ و } p = 1$$

بازده مورد انتظار از این بخت‌آزمایی به صورت زیر است.

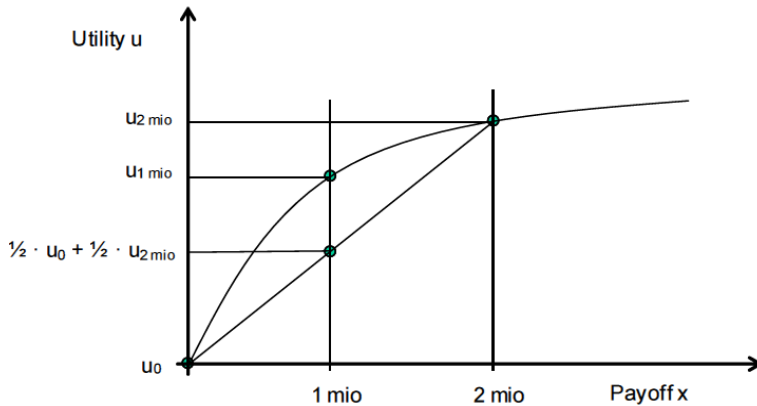
$$E(X) = x_1(p) = 1000000 (1) = 1000000$$

بنابراین بازده مورد انتظار از بخت‌آزمایی دوم نیز برابر با ۱ میلیون یورو است. بازیکن مورد بحث می‌تواند یکی از این دو بخت‌آزمایی را انتخاب نماید. از آنجا که هر دو بازی دارای بازده مورد انتظار یکسانی هستند، او باید بین بخت‌آزمایی‌های اول و دوم بی تفاوت باشد. هر چند که در واقعیت تقریباً تمامی بازیکنان بخت‌آزمایی دوم را ترجیح می‌دهند؛ زیرا در آن ۱ میلیون یورو را با اطمینان کامل به دست می‌آورند. برای توضیح دادن این نوع از منطق و عقلانیت، یک تابع مطلوبیت به نام $u(x)$ برای بازدهی‌های x حاصل از بخت‌آزمایی معرفی می‌شود.

تابع مطلوبیت $u(x)$

همان‌طور که مثال بالا نشان می‌دهد، پول همیشه دارای ارزش یکسانی نیست. دلیل این امر نزولی بودن ارزش پولی است که مقدار آن با اندازه ثابتی افزایش می‌یابد. بازیکنی که خود هیچ پولی در اختیار ندارد، ۱ میلیون یورو قطعی را به ۲ میلیون یورو مطمئن ترجیح می‌دهد، در عین حال که هر دو انتخاب دارای ارزش انتظاری یکسانی هستند. البته

باید گفت که ۱ میلیون یورو نامطمئن ارزش کمتری برای بازیکن مورد نظر دارد. بنابراین می‌توان گفت که ۱ میلیون یورو همیشه دارای ارزش ثابت و یکسانی نیست. این شرایط را می‌توان در یک نمودار با رسم یک منحنی مقعر نمایش داد.



یک تابع مطلوبیت از این نوع را می‌توان مثلاً به صورت زیر نیز مدل‌سازی کرد.

$$u(x) = \sqrt{x}$$

در این صورت مطلوبیت حاصل از به دست آوردن ۱ میلیون یورو به صورت زیر

است.

$$u(1000000\text{€}) = \sqrt{1000000} = 1000$$

و به همین ترتیب، مطلوبیت حاصل از به دست آوردن ۲۰۰۰۰۰۰ یورو نیز برابر با

مقدار زیر است.

$$u(2000000\text{€}) = \sqrt{2000000} \approx 1414.$$

بنابراین ۱ میلیون یورو نامطمئن تنها مطلوبیتی در حدود ۴۱۴ واحد دارد، در حالی که

۱ میلیون یورو مطمئن دارای ۱۰۰۰ واحد مطلوبیت، (در واقع مطلوبیتی به اندازه دو برابر)

است.

مطلوبیت مورد انتظار

پس از آنکه مطلوبیت بازده سود و تابع مطلوبیت بیان شد، می‌توان مطلوبیت مورد انتظار^۱ را از طریق رابطه $u(x)$ محاسبه کرد. مطلوبیت حاصل از یک مقدار بازده را با u و مطلوبیت حاصل از یک بخت‌آزمایی را با U نشان می‌دهیم.

با توجه به مثال‌های قبل در مورد بخت‌آزمایی، می‌دانیم که مطلوبیت حاصل از به‌دست آوردن ۲۰۰۰۰۰۰ یورو با تابع مطلوبیتی که به صورت $u(x) = \sqrt{x}$ تعریف شده بود، کمتر از دو برابر مطلوبیت حاصل از ۱۰۰۰۰۰۰ یورو است. همان‌طور که نمودار نیز نشان می‌دهد، بخت‌آزمایی اول به بخت‌آزمایی دوم ترجیح داده می‌شود؛ زیرا همواره رابطه زیر برقرار است.

$$u\left(\text{یک میلیون}\right) > \frac{1}{2}(u(0)) + \frac{1}{2}\left(u\left(2\text{ میلیون}\right)\right)$$

هم‌چنین می‌توان گفت که مطلوبیت مورد انتظار برای بخت‌آزمایی دوم دو برابر مطلوبیت مورد انتظار برای بخت‌آزمایی اول است.

$$E(U_1) = \frac{1}{2}(u(0)) + \frac{1}{2}(u(2\text{ میلیون})) = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(1414) = 707$$

مطلوبیت مورد انتظار از بخت‌آزمایی دوم به روش زیر به دست می‌آید.

$$E(U_2) = 1\left(u(1\text{ میلیون})\right) = 1000$$

بنابراین خواهیم داشت: $E(u_2) > E(u_1)$

¹ Expected utility

استثنائات در نظریه بازی

اصول

تا کنون همیشه فرض بر این بود که تمامی بازیکنان به صورت عقلایی و خودخواهانه عمل می‌کنند، و همواره تلاش می‌کنند که مطلوبیت (مورد انتظار) خود را به حداکثر برسانند.

اما واقعیت تجربیاتی وجود دارد که نشان می‌دهد که تصمیم‌گیری به صورت عقلایی و خودخواهانه همیشه وضعیت غالب نیست و بازیکنان حاضر در یک بازی همیشه از قواعد موجود در نظریه بازی پیروی نمی‌کنند. همواره می‌توان دید که عواملی مانند، اعتماد، بی‌طرفی، جرمه و به‌طور ساده ارزیابی غلط از یک وضعیت، می‌تواند در نتیجه یک بازی نقش مؤثر داشته باشند.

در ادامه، تعداد مختصری از تجربیات مذکور که در آنها شرکت‌کنندگان در بازی به صورت آشکار غیرعقلانه عمل می‌کنند، بیان می‌شود.

بازی تحت شرایط نااطمینانی: تناقض السبرگ¹

در این بازی، هر بازیکن باید از میان دو کوزه متفاوت که هر کدام دارای ۱۰۰ گوی است، یکی را انتخاب کند و از کوزه منتخب باید یک توپ بیرون بیاورد. در صورتی که بازیکن رنگ درست را انتخاب کند، برنده مقداری پول خواهد شد.

دو گزینه زیر برای انتخاب کوزه موجود است:

- کوزه اول دارای ۵۰ گوی قرمز و ۵۰ گوی سیاه است.

- کوزه دوم نیز دارای ۱۰۰ گوی است که یا همگی قرمز یا همگی سیاه هستند.

1 Ellsberg paradox

با توجه به قواعد حاکم بر نظریه بازی، بازیکن باید میان انتخاب هر یک از دو کوزه بی تفاوت باشد؛ زیرا احتمال انتخاب یک گوی با رنگ درست در هر یک از دو حالت ۵۰ درصد است. با این وجود، در واقعیت، افراد مورد آزمایش عمدتاً کوزه یک را انتخاب می‌کنند.

بازی‌های بدون نااطمینانی

بازی اولتیماتوم

در بازی اولتیماتوم باید ۱۰۰ دلار میان دو نفر تقسیم شود. در آغاز بازیکن اول (پیشنهاد دهنده) پیشنهادی می‌دهد که این پول را چگونه میان خود تقسیم کنند. بازیکن دوم (پاسخگو) می‌تواند این پیشنهاد را بپذیرد و در نتیجه این پول بر اساس این پیشنهاد میان آن دو تقسیم شود، یا اینکه این پیشنهاد را رد کند.

از دیدگاه نظریه بازی، بازیکن اول به بازیکن دوم کمترین مقدار ممکن یعنی ۱ دلار را پیشنهاد می‌دهد و ۹۹ دلار باقیمانده را برای خود نگاه می‌دارد. بازیکن دوم نیز این پیشنهاد را می‌پذیرد؛ زیرا به دست آوردن ۱ دلار بهتر از آن است که هیچ پولی به دست نیآورد. البته در واقعیت، نظریه بازی به سختی مورد توجه افراد قرار می‌گیرد. در واقع معمول‌ترین پیشنهاد از سوی افراد عادی ۵۰-۵۰ است؛ یعنی ۵۰ دلار به هر نفر تعلق بگیرد. معمولاً پاسخ‌دهندگان نیز پیشنهادهایی با مقادیر پایین را رد می‌کنند، حتی اگر پس از رد آن پیشنهادها به مطلوبیت کمتری دست یابند. در این حالت پاسخ‌دهندگان آشکارا به دنبال استراتژی جریمه و تنبیه طرف مقابل هستند.

بازی دیکتاتور

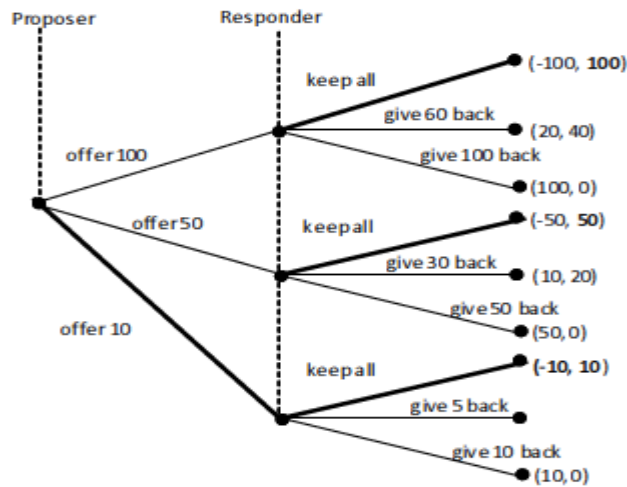
در بازی دیکتاتور، قواعد حاکم بر بازی مشابه با بازی اولتیماتوم است، تنها با این تفاوت که فرد پاسخ‌دهنده نمی‌تواند پیشنهاد را رد کند. این بدان معناست که پاسخ‌دهنده ممکن است. به‌منظور مجازات کردن فرد پیشنهادکننده، پیشنهادی را قبول کند که برای خودش نیز زیان‌آور باشد. با توجه به نظریه بازی، پیشنهاددهنده نیز ممکن است که کل پول را برای خود نگاه دارد؛ زیرا هیچ‌کس نمی‌تواند مانع کسب پول توسط وی شود. البته، در واقعیت، در بازی دیکتاتور احتمال تقسیم پول با نسبت ۵۰-۵۰ در مقایسه با بازی اولتیماتوم کمتری است. از این رو، پیشنهادکننده معمولاً پیشنهادی بین ۱۰ دلار تا ۵۰ دلار را ارائه می‌کند. به عنوان مثال، این موضوع را می‌توان به‌وسیله استراتژی مانند عدالت پیشنهاددهنده^۱ توضیح داد.

بازی مبادله هدیه

در بازی مبادله هدیه، پیشنهاددهنده و پاسخ‌دهنده، هر یک دارای محدوده‌ای از نسبت‌ها برای تقسیم هستند. در ابتدا پیشنهاددهنده دریافت مقداری بین ۱۰ دلار تا ۱۰۰ دلار را به پاسخ‌دهنده پیشنهاد می‌کند. بعد از آن پاسخ‌دهنده می‌تواند پول را نزد خود نگاه دارد یا مقداری از آن را به فرد پیشنهاددهنده بازگرداند. مقداری که پیشنهاددهنده پس می‌گیرد، دو برابر است.

در اینجا این بازی به‌صورت ساده به چندین گزینه زیر محدود می‌شود. این بازی را می‌توان به شکل گسترده زیر نیز به تصویر کشید.

1 Fairness of proposer



البته در واقعیت پیشنهاددهندگان تمایل دارند که مبالغ زیادتری را به پاسخ‌دهندگان پیشنهاد کنند. پاسخ‌دهندگان نیز در نوع خود آمادگی دارند که بخش عمده‌ای از این پول را به پیشنهاد دهنده باز گردانند. هر چه پاسخ‌دهنده بیشتر دریافت کند، تمایل دارد که مقدار بیشتری را به پیشنهاد دهنده باز گرداند. این بازی را می‌توان استراتژی اعتماد^۱ پیشنهاددهنده و استراتژی پاداش^۲ پاسخ‌دهنده نامید.

اگر فرض کنیم که پیشنهاد دهنده ۱۰۰ دلار به پاسخ‌دهنده پیشنهاد دهد و پاسخ‌دهنده مقدار ۷۰ دلار به پیشنهاد دهنده باز گرداند، در این حالت پیشنهاد دهنده ۱۴۰ دلار و پاسخ‌دهنده ۳۰ دلار دریافت خواهند کرد. این نتیجه بدان معناست که هر دو بازیکن نسبت به تعادل زیربازی کامل، در وضعیت بهتری نسبت به قبل قرار می‌گیرند. اما هر دو بازیکن از دیدگاه نظریه بازی به صورت غیرعقلایی رفتار می‌کنند. آنها برای خود پول بیشتری را نسبت به تعادل حاصل از نظریه بازی تضمین می‌کنند.

1 Trust strategy

2 Reward strategy

تعاریف: عدالت، مجازات، اعتماد و پاداش

نتایج حاصل از بازی‌های بدون نااطمینانی به صورت زیر است.

- بازیکنان (همیشه) بازده خود را حداکثر نمی‌کنند.

- بازیکنان (همیشه) به صورت خودخواهانه عمل نمی‌کنند.

بنابراین سوالی که در این جا مطرح است این است که: آیا بازیکنان (به صورت عقلایی عمل نمی‌کنند) و مطلوبیت خود را به حداکثر نمی‌رسانند یا اینکه به شکل متفاوتی بازده خود را حداکثر می‌کنند. یعنی به عنوان مثال بازیکنان عقلایی عمل می‌کنند، زیرا بازده‌های دیگری غیر از بازده پولی در این بازی وجود دارد و بازیکنان بازده‌های غیر پولی خود را به حداکثر می‌رسانند.

تلاش‌های نهادی برای تفسیر و تبیین مسائل هنجارهای اجتماعی و عمل متقابل انجام می‌گیرد تا این مسأله بهتر درک شود نمونه مسائل هنجارهای اجتماعی ایی است که شما با مردم بد رفتار نمی‌کنید و اگر احیانا با مردم بد رفتار کنید، از این رفتار خود احساس بدی دارید. نمونه عمل متقابل نیز این است که با کسانی که با شما خوش رفتار هستند، خوش رفتار باشید و به کسانی که به شما آسیب می‌زنند، آسیب بزنید.

با نگاهی گذرا به بازی‌هایی که در اینجا معرفی شد، می‌توان بررسی کرد که برای کدام بازی‌ها هنجارهای اجتماعی مناسب هستند و کدام بازی‌ها با عمل متقابل تناسب دارند.

- برای بازی اولتیماتوم هنجارهای عادلانه و عمل متقابل مناسب هستند؛ زیرا

✓ قانون ۵۰-۵۰ عادلانه است و دلیلی منطقی برای رفتار مشاهده شده ارائه می‌کند؛

✓ رفتار ناعادلانه (تخلف از هنجارها) به وسیله رد شدن مجازات (جریمه) می‌شود.

- برای بازی دیکتاتور هنجارهای عادلانه و خودخواهی مناسب هستند؛ زیرا

✓ پیشنهاد دهنده فکر می‌کند که عادلانه است اگر از بخشی از پول چشم‌پوشی کند، هرچند پرداخت نصف این پول به‌ندرت اتفاق می‌افتد، چون نمی‌توان در این حالت پیشنهاد دهنده را مجازات کرد.

✓ ترکیبی از عدالت و خودخواهی نیز امکان‌پذیر است.

- برای بازی مبادله هدیه اعتماد و هنجارهای عادلانه مناسب است؛ زیرا

✓ پیشنهاد دهنده به فرد پاسخ‌دهنده اعتماد می‌کند؛

✓ فرد پاسخ‌دهنده نیز به این اعتماد پاسخ می‌دهد و مقدار بیشتری از پول را باز می‌گرداند. به نظر می‌رسد که بازیکنان رفتار متقابل از خود نشان می‌دهند.

اما سؤالات متعددی مطرح است: این هنجارها چه زمانی اثرگذار هستند؟ این هنجارها کدام هستند؟ چرا از این هنجارها استفاده می‌شود؟ بازیکنان چه زمانی خودخواهانه و چه زمانی عادلانه (جوانمردانه) عمل می‌کنند؟ همواره تلاش‌هایی صورت گرفته است تا بتوان این رفتارها را در قالب معادلات تعریف کرد. اولین تلاش برای این منظور مدل رایبیز¹ است که «رفاقت²» را در توابع مطلوبیت به‌صورت زیر وارد کرد:

$$u_i(a_i, b_j, c_i) = \pi(a_i, b_j) + f'_i(b_j, c_i) \cdot [1 + f_i(a_i, b_j)]$$

پارامترهای این بازی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

a_i تصمیم بازیکن i ام

b_j تصمیم بازیکن j ام که از سوی بازیکن i ام انتظار می‌رود

c_i انتظارات بازیکن i ام به‌عنوان عمل انجام شده از سوی بازیکن i ام که

بازیکن j ام انتظار آن را دارد

1 Rabins

2 Friendliness

بازده پولی $\pi(a_i, b_j)$

انتظار بازیکن i ام از دوستی با بازیکن j ام $f'_i(b_j, c_i)$

انتظار بازیکن j ام از دوستی با بازیکن i ام $f'_j(b_j, c_i)$

از این مدل می‌توان برای تفسیر بعضی از تجربیات استفاده کرد، البته تجربیاتی نیز وجود دارد که از این مدل پیروی نمی‌کنند. حقیقت این است که در نظریه بازی این واقعیت پذیرفته شده است که رفتار یک فرد صرفاً توسط حداکثر سازی مطلوبیت وی تبیین نمی‌شود. از این رو، بسیاری از نظریه‌پردازان بازی‌ها امروزه به عمل متقابل اعتقاد دارند. از طرف دیگر، از نظر روان‌شناختی پذیرفته شده است که بازیکنان در شرایط خاصی ممکن است به صورت عقلایی عمل نکنند.

فصل ششم: موضوعات پیشرفته در نظریه بازی

مقدمه:

همان‌طور که بیان شد، نظریه بازی مطالعه‌ی برهم‌کنش (عکس‌العمل) تصمیم‌گیرندگان است. در فصول قبل، نظریه تصمیم‌گیری بهینه‌ی یک عامل اقتصادی منفرد- واحد اقتصادی (شرکت) یا مصرف‌کننده - را در محیط‌های خیلی ساده مورد مطالعه قرار دادیم. عکس‌العمل‌های راهبردی (استراتژیک) عاملین اقتصادی چندان پیچیده نیست. در این فصل، اصول و مبانی تحلیل‌های عمیق‌تر رفتار عاملین اقتصادی در محیط‌های پیچیده‌تر بررسی خواهد شد.

زمینه‌ها یا مسیرهای بسیاری وجود دارد که فرد می‌تواند عکس‌العمل تصمیم‌گیرندگان را بررسی کند. شخص می‌تواند رفتار را از نظر جامعه‌شناسی، روان‌شناسی، زیست‌شناسی و غیره مورد بررسی قرار دهد. هر یک از این رویکردها در زمینه‌های معینی سودمند هستند. نظریه بازی بر مطالعه‌ی تصمیم‌گیری‌های عقلایی تأکید می‌کند چون احساس می‌شود مناسب‌ترین مدل یا الگو برای اقتصادی‌ترین رفتار باشد. نظریه بازی در دو دهه‌ی گذشته کاربرد وسیعی در اقتصاد پیدا کرد و باعث پیشرفت‌های زیادی در روشن ساختن ماهیت عکس‌العمل استراتژیک در مدل‌های اقتصادی شده است. در واقع، بیشتر رفتارهای اقتصادی را می‌توان به عنوان موارد (حالت‌های) خاصی از نظریه بازی در نظر گرفت و درک دقیق و مناسب نظریه بازی جزء ضروری هر مجموعه از ابزارهای تحلیلی اقتصاددانان به شمار می‌رود و باورهای ذهنی‌اش حداکثر می‌کند و وقتی اطلاعات جدیدی مطابق با قانون بیز وارد می‌شود، آن اعتقادهای اصلاح و تعدیل خواهند شد.

مثال: بازی سکه‌ای شیر یا خط:

در این بازی، دو بازیکن وجود دارند، سطر (ردیف) و ستون. هر بازیکن سکه‌ای دارد که می‌تواند طوری آن را قرار دهد که یا طرف شیر آن یا طرف خط آن رو به پشت قرار

گیرد. بنابراین، هر بازیکن دو استراتژی دارد که آن را به عنوان شیر یا خط خلاصه می‌کنیم. همین که استراتژی‌ها انتخاب شد، برای هر بازیکن پرداخت‌هایی وجود دارد که به انتخاب‌های هر دو بازیکن، بستگی دارد. این انتخاب‌ها مستقل‌اند و هیچ بازیکنی زمانی که انتخاب خودش را تعیین می‌کند، انتخاب بازیکن دیگری را نمی‌داند. فرض می‌کنیم اگر هر دو بازیکن شیر ببرند یا هر دو خط ببرند، آنگاه بازیکن سطر (ردیف) یک دلار می‌برد و بازیکن ستون یک دلار می‌بازد. از طرف دیگر، اگر یک بازیکن شیر و دیگری خط ببرد، آنگاه بازیکن ستون یک دلار می‌برد و بازیکن سطر یک دلار می‌بازد.

ماتریس بازی سکه‌ای شیر یا خط

| | شیر | خط |
|-----|-------|-------|
| شیر | (۱-۱) | (۱-۱) |
| خط | (۱-۱) | (۱-۱) |

A بازیکن سطر و B بازیکن ستون می‌باشد.

نوع اصلاح شده‌ی ساده‌ای از معمای زندانی که در فصول قبل بررسی شد و توسط آئومان (۱۹۸۷) ارائه شد، نوعی بازی است که در آن هر بازیکن می‌تواند به راحتی به داور مسابقه اعلام کند: "۱۰۰۰ دلار به من بدهید" یا "۳۰۰۰ دلار به بازیکن دیگر بدهید". توجه کنید که پرداخت‌های پولی از طرف شخص سومی می‌آید نه از بازیکنان. معمای زندانی یک بازی با مجموع متغیر است. بازیکنان می‌توانند بازی را از قبل مطرح کنند اما تصمیمات واقعی باید مستقل باشد. استراتژی در کاربردهای دیگر، همکاری و انکار معانی متفاوت دارند. برای مثال، در موقعیت انحصار دو جانبه فروش همکاری به

معنای "توافق برای مطالبه یک قیمت بالاتر" می‌تولند باشد و عدم همکاری (انکار) به معنای "تقلیل قیمت و جذب بازار رقیب‌تان" است.

مثال: انحصار دو جانبه فروش کورنو:

یک بازی انحصاری دوجانبه ساده که نخست آن را کورنو (۱۹۳۸) تجزیه و تحلیل کرده در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم دو بنگاه (شرکت) وجود دارند که کالای یکسانی را با هزینه نهایی C تولید می‌کنند. هر بنگاه باید بدون دانستن و آگاهی از تصمیم تولیدی انحصارگر دیگر تصمیم بگیرد چه قدر محصول (ستانده) تولید کند. اگر بنگاه‌ها در مجموع X واحد کالا را تولیدکننده قیمت بازار $p(x)$ خواهد بود. یعنی $p(x)$ منحنی تقاضای معکوسی است که این دو تولیدکننده (شرکت با آن روبه‌رو هستند).

اگر x_i سطح تولید بنگاه i باشد، قیمت بازار $p(x_1 + x_2)$ خواهد بود و سود بنگاه i به کمک رابطه‌ی $\pi_i(p(x_1 + x_2) - c)x_i$ تعیین خواهد شد. در این بازی، استراتژی بنگاه i ، انتخاب سطح تولیدش بوده و پرداخت به بنگاه i سودش خواهد بود.

مثال: انحصار دوجانبه فروش برتراند:

وضع مشابهی مانند بازی کورنو در نظر می‌گیریم، اما حالا فرض می‌شود که استراتژی هر بازیکن اعلام قیمتی است که در آن مایل به عرضه‌ی مقدار دلخواهی از کالای مزبور است. در این حالت تابع پرداخت شکل اساساً متفاوتی اختیار می‌کند. این فرض مطلوب است که مصرف‌کنندگان فقط از بنگاهی که کمترین قیمت را دارد خرید خواهند کرد و نیز فرض می‌کنیم که آنها در صورت مطالبه قیمت مشابه خرید خود را بین دو بنگاه به طور برابر تقسیم خواهند کرد با این فرض که $x(p)$ بیانگر تابع تقاضای بازار و C هزینه نهایی باشد، این امر منجر به پرداخت بنگاه ۱ به شکل زیر می‌شود:

$$\pi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)x(p_1) & , p_1 < p_2 \\ (p_1 - c)x(p_1) & , p_1 = p_2 \text{ اگر} \\ 0 & , p_1 > p_2 \end{cases}$$

این بازی ساختاری مشابه معمای زندانی دارد. اگر هر دو بازیکن همکاری کنند، می‌توانند قیمت انحصاری مطالبه کنند و هر یک نصف سود انحصاری را به دست آورند. اما در این حالت همواره وسوسه‌ای برای یک بازیکن وجود دارد که اندکی قیمتش را تقلیل داده و بدین وسیله تمام بازار را برای خودش تسخیر کند. اما اگر هر دو بازیکن قیمت قیمت را تقلیل دهند، هر دو در وضع بدتری قرار خواهد گرفت. توجه کنید بازی کورنو و برتراند ساختار اساساً متفاوتی ندارند حتی اگر برای مدلسازی پدیده اقتصادی انحصار دوجانبه فروش مشابه به کار روند. در بازی کورنو، پرداخت به هر بنگاه تابعی پیوسته از انتخاب استراتژیک خود بوده اما در بازی برتراند پرداخت‌ها تابعی ناپیوسته از استراتژی‌ها هستند. همان‌طور که انتظار می‌رود، این به تعادل کاملاً متفاوت منجر می‌شود.

کدام یک از این مدلها قابل قبول و صحیح هستند؟ پاسخ به این بستگی دارد که شما سعی دارید چه مدلی بسازید. در اکثر مدل‌سازی‌های اقتصادی، هنری برای گزینش تعدادی از انتخاب‌های استراتژیک بازی‌هایی که، عنصری از تکرارهای استراتژیک حقیقی را در بر می‌گیرند وجود دارد و در عین حال (ضمناً) تجزیه و تحلیل بازی به اندازه‌ی کافی ساده می‌شود.

مفاهیم راه‌حل:

استراتژی مختلط (ترکیبی) و استراتژی خالص (مطلق):

در اکثر بازی‌ها، ماهیت عکس‌العمل استراتژیک نشان می‌دهد که یک بازیکن نمی‌خواهد استراتژی را انتخاب نماید که از قبل به وسیله‌ی بازیکن دیگر قابل پیش‌بینی نیست. برای مثال، بازی شیر یا خط که قبلاً شرح داده شده را در نظر بگیرید. در اینجا واضح است که هیچ بازیکنی نمی‌خواهد بازیکن دیگر انتخاب او را به طور دقیق پیش‌بینی کند. بنابراین، در نظر گرفتن یک استراتژی تصادفی از شیرهای ظاهر شده با احتمال P_H و خط‌های ظاهر شده با احتمال P_T طبیعی است. چنین استراتژی، یک استراتژی مختلط (ترکیبی) نامیده می‌شود. استراتژی‌هایی که در آن یک انتخاب با احتمال ۱ ساخته شده، استراتژی خالص (مطلق) نامیده می‌شوند.

اگر R مجموعه‌ی استراتژی‌های خالص در دسترس شخص A (سطر) باشد، مجموعه‌ی استراتژی‌های مختلط موجود برای A ، مجموعه‌ای از تمام توزیع احتمال‌های موجود در دامنه‌ی R ، است، که احتمال بازی کردن استراتژی r در R ، P_r است. به طور مشابه، P_c احتمال بازی‌های شخص B با استراتژی C خواهد بود. به منظور حل این بازی، باید مجموعه‌ای از استراتژی‌های مختلط (P_r, P_c) را که تا حدودی در تعادل هستند، پیدا کنیم. شاید برخی از استراتژی‌های مختلط تعادلی، با احتمال ۱ برای برخی از انتخاب‌ها تعیین شوند که در این حالت آنها به عنوان استراتژی‌های خالص تفسیر می‌شوند.

نقطه شروع طبیعی (عادی) تحقیق برای مفهوم راه‌حل، نظریه تصمیم استاندارد است: فرض می‌کنیم که هر بازیکن یک اعتقاد ذهنی احتمالی درباره استراتژی‌هایی که بازیکن دیگر ممکن است انتخاب کند داشته و هر بازیکن استراتژی‌ای را انتخاب می‌کند که پرداخت انتظاریش را حداکثر سازد.

برای مثال فرض کنید اگر \mathbf{r}, \mathbf{A} و \mathbf{C}, \mathbf{B} را بازی کند، پرداخت \mathbf{A} برابر $u_r(r, c)$ است. فرض می‌کنیم \mathbf{A} یک توزیع احتمال ذهنی روی انتخاب‌های \mathbf{B} دارد که آن را با π_c نشان می‌دهیم. برای بررسی اصول اساسی ایده‌ی احتمال ذهنی به فصل ۴ مراجعه کنید. در اینجا π_c احتمال ذهنی \mathbf{A} درباره انتخاب \mathbf{C} که \mathbf{B} آن را خواهد ساخت، است. بطور مشابه، \mathbf{B} اعتقادی درباره‌ی رفتار \mathbf{A} خواهد داشت که ما آن را با π_c نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم هر بازیکن استراتژی مختلطی را بازی می‌کند و استراتژی مختلط واقعی \mathbf{A} را با P_r و استراتژی مختلط واقعی \mathbf{B} را با P_c نشان می‌دهیم. از آنجا که \mathbf{A} انتخاب خود را بدون دانستن انتخاب \mathbf{B} انجام می‌دهد، احتمال شخص \mathbf{A} در رخ دادن پیامد خاص (r, c) ، $P_r \pi_c$ است.

این احتمال (ذهنی) در واقع برابر این احتمال است که شخص \mathbf{A} ، \mathbf{r} را بازی کرده ضربدر احتمال (ذهنی) \mathbf{A} درباره‌ی این که شخص \mathbf{B} ، \mathbf{C} را بازی کند. بنابراین، هدف \mathbf{A} انتخاب توزیع احتمال P_r است که تابع زیر را حداکثر کند:

$$A \text{ پرداخت انتظاری} = \sum_r \sum_c p_c \pi_r u_c(r, c)$$

از طرف دیگر، شخص \mathbf{B} مایل است تابع زیر را حداکثر کند:

$$B \text{ پرداخت انتظاری} = \sum_c \sum_r p_r \pi_c u_c(r, c)$$

توجه به حال، در واقع یک مدل نظری تصمیم‌گیری استلندارد را برای این بازی به کار بردیم - هر بازیکن می‌خواهد مطلوبیت انتظاری خود را با مفروض بودن اعتقادهای خود

حداکثر کند. با مفروض (معلوم) بودن اعتقاداتم درباره‌ی آنچه که بازیکن دیگر ممکن است انجام دهد، من استراتژیی انتخاب می‌کنم که مطلوبیت انتظاری‌ام را حداکثر کند.

تعادل نش:

در قواعد (فرمول‌های) پرداخت انتظاری، که در پایان بخش قبل ارائه شد، رفتار شخص A (نحوه بازی احتمالی او با هر یک از استراتژی‌هایش) با توزیع احتمال P_r و اعتقادات شخص B درباره‌ی رفتار A با توزیع احتمال (ذهنی) (\hat{h}_r) نشان داده شده است. لازمی سازگاری طبیعی این است که اعتقاد هر بازیکن درباره‌ی انتخاب‌های بازیکن دیگر، با انتخاب‌های واقعی بازیکن دیگر که قصد انجام آن را دارد، منطبق شود. انتظاراتی که با فراوانی‌های واقعی سازگار هستند، گاهی اوقات انتظارات عقلایی نامیده می‌شوند. تعادل نش نوع خاصی از تعادل انتظارات عقلایی است.

تعریف تعادل نش در استراتژی‌های مختلط):

یک تعادل نش ترکیبی از اعتقادات احتمالی (\hat{h}_r, \hat{h}_c) روی استراتژی‌ها و احتمال انتخاب استراتژی‌ها (P_r, P_c) است به طوری که:

(۱) اعتقادات و باورها صحیح هستند: به ازای تمام مقادیر \mathcal{I}, \mathcal{C} و $P_r = \hat{h}_r$ و $P_c = \hat{h}_c$ است

(۲) هر بازیکن (P_r) و P_c را به گونه‌ای انتخاب می‌کند که مطلوبیت انتظاری خود را با مفروض بودن اعتقادات خود حداکثر کند.

در این تعریف، تعادل نش در استراتژی‌های مختلط تعادلی در فعالیت‌ها و اعتقادات است. در تعادل هر بازیکن به درستی پیش‌بینی می‌کند که بازیکن دیگر احتمالاً چگونه

انتخاب‌های گوناگون می‌کند و اعتقادات دو بازیکن به صورت متقابل (دو به دو) سازگار هستند.

تعریف متداول و مناسب‌تر تعادل نش در استراتژی‌های مختلط این است که زوجی از استراتژی‌های مختلط (P_r, P_c) است به گونه‌ای که هر انتخاب عامل (بازیکن) مطلوبیت انتظاری‌اش را با مفروض بودن استراتژی بازیکن دیگر، حداکثر می‌کند. این معادل تعریفی است که ما استفاده کردیم، ولی گمراه کننده است، چون تشخیص بین اعتقادات بازیکنان و فعالیت‌های آنها نامشخص به نظر می‌رسد. سعی می‌کنیم در تشخیص دو مفهوم مزبور خیلی دقت کنیم.

حالت جالب توجه و خاصی از تعادل نش در استراتژی‌های مختلط، تعادل نش در استراتژی‌های خالص است یعنی تعادل نش ساده‌ای که در آن احتمال بازی استراتژی خاصی برای هر بازیکن ۱ است. یعنی:

تعریف (تعادل نش در استراتژی‌های خالص):

تعادل نش در استراتژی‌های خالص یک زوج (r^*, c^*) است به طوری که به ازای همه‌ی استراتژی‌های شخص A یعنی r یعنی $u_r(r^*, r^*) \geq u_r(r, c^*)$ و برای همه‌ی استراتژی‌های شخص B، $u_c(r^*, c^*) \geq u_c(r^*, c)$ است. تعادل نش حداقل سازگاری لازم برای اعمال کردن روی زوجی از استراتژی‌ها است: اگر شخص A معتقد باشد که شخص B، C^* را بازی خواهد کرد، بهترین پاسخ شخص A، r^* است و به طور مشابه برای شخص B نیز برقرار است. هیچ بازیکنی علاقه ندارد به طور یک جانبه از استراتژی تعادل نش منحرف گردد.

اگر مجموعه‌ای از استراتژی‌ها در تعادل نش نباشد، آنگاه حداقل یک بازیکن تفکر سازگاری با رفتار بازیکن دیگر ندارد. یعنی یکی از بازیکنان باید انتظار داشته باشد بازیکن دیگر برای نفع شخصی خودش فعالیت نمی‌کند - و به این مورد فرض اولیه تجزیه و تحلیل را نقض می‌کند.

مفهوم تعادل اغلب به عنوان نقطه ساکن برخی از فرایندهای تعدیل تصور می‌شود. یک تفسیر از تعادل نش این است که این تعادل فرایند تعدیل تصمیم‌گیری (تفکر) به واسطه‌ی انگیزه‌های بازیکن دیگر است. شخص A ممکن است فکر کند: "اگر من تصور کنم شخص B فکر کند که من r_1 را بازی خواهم کرد، آنگاه بهترین کار برای او این است که استراتژی دیگر c_2 را بازی کند. اما اگر شخص B سعی کند c_2 را بازی کند، آنگاه بهترین واکنش من بازی r_2 است" و الی آخر.

مثال (تعادل نش در تضاد «تقابل» جنسیت):

بازی زیر به عنوان تضاد یا تقابل جنسیت شناخته شده است. داستان پشت این بازی چیزهای شبیه موضوع زیر را بیان می‌کند. روندا (سطر) و کالوین (ستون) بحث می‌کنند که آیا این ترم اقتصاد خرد بگیرند یا اقتصاد کلان. اگر هر دو اقتصاد خرد بگیرند، روندا ۲ واحد مطلوبیت و کالوین ۱ واحد مطلوبیت به دست می‌آورد. اگر هر دو اقتصاد کلان بگیرند، مطلوبیت پرداختی به آنها برعکس خواهد شد. اگر آنها درس‌های متفاوتی را بگیرند، هیچ مطلوبیتی به دست نمی‌آورند.

حال، همه‌ی تعادل نش این بازی را محاسبه می‌کنیم. ابتدا، تعادل نش در استراتژی‌های خالص را جستجو می‌کنیم. این کار در واقع مستلزم بررسی سیستماتیک بهترین واکنش به انتخاب استراتژی‌های گوناگون است. فرض کنید کالوین فکر می‌کند که روندا، بالا

(Top) را بازی کند. کالوین ۱ واحد مطلوبیت از بازی چپ و صفر واحد از بازی راست به دست می‌آورد، بنابراین چپ بهترین واکنش کالوین به بازی بالای روندا است. از طرف دیگر، اگر کالوین چپ را بازی کند، آنگاه به سهولت ملاحظه می‌شود که بازی بالا برای روندا بهینه است. این روش یا مسیر استدلال نشان می‌دهد که (بالا، چپ) یک تعادل نش است. استدلال مشابهی نشان می‌دهد که (پائین، راست) نیز یک تعادل نش است.

تقابل جنسیت

| | کالوین | | |
|-------|--------------|----------|-------------|
| | | چپ (خرد) | راست (کلان) |
| روندا | خرد (بالا) | (۲و۱) | (۰و۰) |
| | کلان (پائین) | (۰و۰) | (۱و۲) |

ما همچنین این بازی را به طور سیستماتیک با نوشتن مسئله حداکثر کردن می‌توانیم حل کنیم و هر فرد (عامل) باید مثل حداکثر کردن راه حل کرده و شرط‌های مرتبه‌ی اول را بررسی کند. فرض کنید (P_t, P_b) احتمالاتی باشند که بر اساس آن روندا بالا تو پائین را بازی می‌کند و (P_l, P_r) را نیز به روش مشابه تعریف کنید. سپس مسئله روندا به صورت زیر است:

$$\max_{(p_t, p_b)} p_t [p_l 2 + p_r 1] + p_b [p_l 0 + p_r 1]$$

$$p_t \geq 0$$

$$p_b \geq 0$$

فرض کنید \mathcal{E} ، μ_t و μ_b ضرایب کان - تاکر روی قیود (محدودیت‌ها) باشند به طوری که اگر لاگرانژ مسئله به صورت زیر باشد:

$$\mathcal{E} = 2p_t p_l + p_b p_r - \lambda(p_t + p_b - 1) - \mu_t p_t - \mu_b p_b$$

با مشتق‌گیری نسبت به P_t و P_b ملاحظه می‌کنیم شرط‌های کان - تاکر برای روندا عبارتند از:

$$2p_l = \lambda + \mu_t$$

چون از قبل راه‌حل‌های استراتژی خالص را می‌دانیم، فقط حالتی را در نظر می‌گیریم که $P_t > 0$ و $P_b > 0$ ، شرایط ایستای مکمل (تکمیلی) بیانگر این است که $\mu_t = \mu_b = 0$.

به کمک این واقعیت که $p_l + p_r = 1$ ، ملاحظه می‌شود که روندا متوجه خواهد شد وقتی $p_l = 1/3$ و $p_r = 2/3$ است، بازی با یک استراتژی مختلط برای او بهینه خواهد بود.

در زیر روش مشابهی برای کالوین ارائه می‌شود، ما یافتیم که $p_l = 1/3$ و $p_r = 2/3$ است. پرداخت انتظاری به هر بازیکن حاصل از این استراتژی مختلط با جایگذاری این اعداد در تابع هدف محاسبه می‌شود. در این مورد پرداخت انتظاری برای هر بازیکن، $3/2$ است. توجه کنید هر بازیکن تعادل استراتژی خالص را به استراتژی مختلط ترجیح خواهد داد چون پرداخت‌های بیشتری برای هر بازیکن دارد.

نکته ۱-۳-۵: یک اشکال یا ضعف نظریه‌ی استراتژی مختلط این است که گاهی اوقات ارائه تفسیری رفتاری از ایده‌ی استراتژی مختلط مشکل است. هر چند در برخی بازی‌ها، مثل بازی سکه‌ای شیر یا خط، استراتژی‌های مختلط تنها تعادل معقول و مناسب هستند.

اما در سایر بازی‌های اقتصادی مثل بازی انحصار دوجانبه فروش، استراتژی‌های مختلط غیرواقعی و نامعقول به نظر می‌رسند.

استراتژی‌های غالب

فرض کنید r_1 و r_2 دو استراتژی برای شخص **A** (سطر) باشد. می‌گوییم صرفنظر از انتخاب شخص **B**، اگر پرداخت استراتژی r_1 اکیداً بزرگتر از پرداخت حاصل از استراتژی r_2 باشد، برای شخص **A** به طور اکید r_1 بر r_2 غالب باشد. اگر پرداخت حاصل از r_1 انتخاب بزرگتر باشد، استراتژی r_1 به طور ضعیفی بر r_2 غالب است.

یک تعادل استراتژی غالب انتخابی از استراتژی‌ها است که توسط هر بازیکن اتخاذ می‌شود به طوری که هر استراتژی (به طور ضعیفی) بر هر استراتژی موجود دیگر برای آن بازیکن، غالب باشد. یک بازی جالب توجه خاص دیگری که یک تعادل استراتژی غالب دارد معمای زندانی است که در آن تعادل استراتژی غالب (اعتراف به جرم، اعتراف به جرم) است. اگر من معتقد باشم که شخص دیگر اقرار به جرم نخواهد کرد آنگاه اقرار به جرم برایم مزیت دارد و اگر من معتقد باشم که شخص دیگر اقرار خواهد کرد، هنوز هم اقرار به جرم به نفع من خواهد بود. بوضوح، تعادل استراتژی غالب یک تعادل نش است، اما تمام تعادل‌های نش، تعادل استراتژی غالب نیستند. تعادل استراتژی غالب یک راه‌حل اجباری خاتص برای بازی است، چون انتخاب بهینه منحصر بفردی برای هر بازیکن وجود دارد.

بازی‌های تکراری

در اکثر موارد، مناسب نیست انتظار داشته باشیم که پیامد یک بازی تکراری با بازیکنان یکسان همانند وجود یک حالت تکراری از بازی یک مرحله‌ای باشد. دلیل این امر آن

است که فضای استراتژی بازی تکراری بزرگتر می‌شود. هر بازیکن می‌تواند انتخاب خود را در یک نقطه به صورت تابعی از سابقه کامل بازی تا آن نقطه تعیین کند. از آنجا که رقیب می‌تواند رفتارش را بر اساس سابقه انتخاب‌های من اصلاح کند، من باید وقتی انتخاب‌های خودم را می‌سازم این تأثیر را مدنظر داشته باشم.

حال این موضوع را در زمینه‌ی بازی ساده‌ی معمای زندانی که قبلاً توصیف شد تجزیه و تحلیل (آنالیز) می‌کنیم. در اینجا مصلحت بلندمدت هر دو بازیکن سعی در به دست آوردن راه‌حل (همکاری، همکاری) است. بنابراین، ممکن است برای یک بازیکن معقول باشد تلاش کند به بازیکن دیگر علامت دهد که او مایل است به نحو مطلوب عمل کرده و در حرکت اول بازی راه‌حل همکاری را انتخاب کند. البته، مصلحت کوتاه‌مدت بازیکن دیگر انکار جرم است، اما آیا این واقعاً مصلحت بلندمدتش نیز هست؟ او ممکن است استدلال کند اگر جرم را بپذیرد، بازیکن دیگر شاید طاقتش را از دست داده و از آن به بعد خودش از جرم فرار کند. بنابراین، بازیکن دوم ممکن است در بلندمدت از بازی استراتژی بهینه کوتاه‌مدت ضرر ببیند. واقعیت و رای این استدلال این است که حرکتی که الان می‌کنم شاید در آینده بازتاب داشته باشد- انتخاب‌های آینده بازیکن دیگر (زندانی دیگر، در این مورد خاص) ممکن است به انتخاب‌های کنونی من بستگی داشته باشد.

حال می‌پرسیم آیا استراتژی (همکاری، همکاری) می‌تواند یک نش از معماری زندانی تکرار شده (تکراری) باشد. ابتدا موردی را در نظر می‌گیریم که در آن هر بازیکن می‌داند که بازی به تعداد دفعات ثابتی تکرار خواهد شد. استدلال بازیکنان را درست قبل از دور آخر بازی در نظر بگیرید. هر یک از بازیکنان استدلال می‌کند که در این نقطه آن‌ها بازیی یک مرحله‌ای را بازی می‌کنند. از آنجا که در حرکت آخر هیچ فرصتی برای آینده باقی نماند، منطق استاندارد برای تعادل نش به کار رفته و هر دو نفر جرم را انکار می‌کنند.

حال حرکت ما قبل آخر را در نظر بگیرید. در این جا به نظر می‌رسد ممکن است هر دو بازیکن به همکاری بپردازند به این خاطر که علایمی که آنها می‌دهند را نشانه و سمبل مطلوبی است که دوباره در حرکت بعدی نسبت به حرکت گذشته (آخر) وجود ندارد. تا زمانی که هر دو بازیکن معتقد باشند که بازیکن دیگر حرکت نهایی را نخواهد پذیرفت، هیچ مزیتی برای تلاش در جهت تحت تأثیر قرار دادن رفتار آینده با مطلوب بودن حرکت ما قبل آخر وجود ندارد. منطق مشابهی از قیاس قهقرایی برای دو حرکت ما قبل آخر قابل استفاده است و الی آخر. در معمای زندانی تکرار شده با تعداد محدودی از تکرارها، تعادل نشی همچنان عدم پذیرش (انکار) هر بار جرم است. در بازی تکراری با تعداد تکرارهای نامحدود، این وضعیت کاملاً متفاوت است.

در این مورد، در هر مرحله مشخص است که بازی دست کم یک بار بیشتر تکرار خواهد شد و بنابراین مزایای (بالقوه‌ای) برای همکاری وجود خواهد داشت. حال نحوه کارکرد و تأثیر این حالت را در مورد معمای زندانی بررسی می‌کنیم.

بازی‌ای را در نظر بگیرید که شامل تعداد نامحدودی تکرار از معمای زندانی شرح داده شده‌ی قبلی است. استراتژی‌ها در این بازی تکراری، دنباله‌ای از توابع‌اند که نشان می‌دهد آیا هر بازیکن در یک مرحله‌ی خاص به صورت تابعی از سابقه بازی تا آن مرحله، همکاری خواهد کرد یا نخواهد پذیرفت. پرداخت‌ها در بازی تکراری مجموع پرداخت‌های تنزیل شده در هر مرحله هستند. یعنی اگر بازیکنی در زمان t پرداخت u_t

را به دست آورد، پرداختش در بازی تکرار شده $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{u_t}{(1+r)^t}$ است که در اینجا r نرخ

تنزیل است.

حال نشان می‌دهیم تا زمانی که نرخ تنزیل خیلی زیاد نیست زوجی از استراتژی‌های تعادل نش وجود دارد طوری که هر بازیکن تشخیص می‌دهد مصلحت او در همکاری در هر مرحله است.

در واقع، نشان دادن یک مثال روشن از این گونه استراتژی‌ها ساده است. استراتژی زیر را در نظر بگیرید: در حرکت فعلی همکاری می‌شود مگر آن که بازیکن دیگر در مرحله‌ی گذشته (آخر) بازی را نپذیرفته باشد. اگر بازیکن دیگر در حرکت گذشته بازی را نپذیرفته باشد (رد کند)، آنگاه برای همیشه بازی را رد می‌کنم (نمی‌پذیرم). این استراتژی گاهی اوقات، استراتژی مجازات (تنبیه) نامیده می‌شود. به این دلیل واضح و بدیهی که اگر بازیکنی بازی را نپذیرفت (همکاری را رد کرد)، او همیشه با پرداخت کمتری تنبیه خواهد شد.

برای نشان دادن این که زوجی از استراتژی‌های مجازات، یک تعادل نش را تشکیل می‌دهند، در واقع باید نشان دهیم که اگر یک بازیکن استراتژی مجازات بازی کرد، بازی دیگر نمی‌تولند بهتر از بازی استراتژی مجازات بازی کند. فرض کنید، بازیکنان تا مرحله‌ی T همکاری می‌کنند و در نظر بگیرید اگر بازیکنی تصمیم بگیرد در این مرحله بازی را رد کند (نپذیرد) چه اتفاقی خواهد افتاد. با استفاده از اعداد مثال معمای زندانی، او پرداخت متوسط ۴ دلار را به دست خواهد آورد، اما او همچنین خودش را به جریان نامحدودی از پرداخت‌های ۱ دلاری محدود می‌کند. ارزش تنزیل شده‌ی چنین جریانی از پرداختها،

$$\frac{1}{r} \text{ است بنابراین پرداخت انتظاری کل او حاصل از نپذیرفتن بازی } 4 + \frac{1}{r} \text{ است.}$$

از طرف دیگر، پرداخت انتظاری به او حاصل از ادامه‌ی همکاری، $3 + \frac{3}{r}$ است. ادامه‌ی همکاری تا زمانی ترجیح داده می‌شود که $4 + \frac{1}{r} > 3 + \frac{3}{r}$ باشد یعنی تا زمانی که $r < 2$ است.

تا زمانی که این شرط برقرار باشد، استراتژی مجازات یک تعادل نش به صورت زیر را شکل می‌دهد:

اگر یک گروه (فرد) استراتژی مجازات را بازی کند، گروه دیگری نیز می‌خواهد آن را بازی کند و هیچ گروهی نمی‌تواند با انحراف یک جانبه از این انتخاب منفعتی به دست آورد.

این ساختار کاملاً قوی و مستحکم است. اصولاً استدلال مشابهی برای هر پرداختی که بیش از پرداخت حاصله از انکار جرم، است اعمال می‌شود. نتیجه مشهوری به عنوان قضیه فالک (Folk) شناخته شده که به طور دقیق این ایده را بیان می‌کند: در معمای زندانی تکراری، اگر هر دو نفر پیوسته جرم را انکار کنند، هر پرداخت بزرگتر از پرداخت دریافت شده را می‌توان به عنوان یک تعادل نش در نظر گرفت.

مثال: حفظ یک کارتل:

انحصار دوجانبه‌ی ساده‌ای را در نظر بگیرید که اگر هر دو بنگاه بازی کورنو را انتخاب کنند، سود (\hbar_c, \hbar_c) را به دست می‌آورند و اگر هر دو بنگاه مقدار ساده‌ای که سود مشترک‌شان را حداکثر می‌کند تولید کنند، سود (\hbar_c, \hbar_c) را به دست خواهند آورد. یعنی، آنها به صورت یک کارتل فعالیت (عمل) می‌کنند. بدیهی است مقادیر ستاده‌ای که سود مشترک را حداکثر می‌کند به طور نمونه در یک بازی یک مرحله‌ای (دوره‌ای) تعادل

نش نیست - هر تولیدکننده اگر معتقد باشد که ستاده‌ی تولیدکننده‌ی دیگر ثابت خواهد بود، انگیزه‌ای برای دامپینگ (قیمت شکنی به قصد خارج کردن رقبای بازار و به دست آوردن موقعیت انحصاری) ستاده‌ی اضافی دارد. ولی، به هر حال تا زمانی که نرخ تنزیل خیلی زیاد نیست، راه‌حل حداکثر سازی سود مشترک یک تعادل نش از بازی تکراری خواهد بود.

استراتژی مجازات مناسب برای هر بنگاه این است که ستاده کارتل را تولید کند مگر این که بنگاه دیگر از کارتل منحرف شود و در این حالت بنگاه همیشه مقدار ستاده‌ی کورنو را تولید خواهد کرد. استدلال مشابهی با استدلال معمای زندانی نشان می‌دهد که این تعادل نش است.

اصلاحات تعادل نش:

مفهوم تعادل نش شبیه تعریف منطقی تعادلی از بازی به نظر می‌رسد. مثل هر مفهوم تعادلی، دو سؤال جالب مطرح می‌شود؟ (۱) آیا به طور کلی تعادل نش وجود خواهد داشت؟ و (۲) آیا تعادل نش منحصر بفرد است.

خوشبختانه، مسئله وجود تعادل نش مشکل آفرین نیست. نش (۱۹۵۰) نشان داد که برای تعداد محدودی از عاملین اقتصادی و تعداد محدودی از استراتژی‌های خالص، تعادل همواره وجود خواهد داشت. البته ممکن است یک تعادل مستلزم استراتژی‌های مختلط باشد. در فصل هفتم نشان خواهیم داد که اگر استراتژی مجموعه فشرده و محدب بوده و توابع پرداخت پیوسته و شبه مقعر باشند، همیشه تک تعادل نش در استراتژی خالص وجود دارد.

به هر حال، معمولاً وقوع حالت منحصر بفرد بودن تعادل بسیار بعید است. قبلاً ملاحظه کردیم که ممکن است چندین تعادل نش برای یک بازی وجود داشته باشد.

نظریه پردازان نظریه بازی تلاش قابل توجهی را برای کشف و شناسایی معیارهایی که برای انتخاب از میان تعادل‌های نشی به کار برده شوند، انجام داده‌اند. این معیارها به عنوان اصلاحات مفهوم تعادل نش شناخت شده‌اند و در زیر چند مورد از آنها را بررسی خواهیم کرد.

حذف استراتژی‌های غالب:

زمانی که هیچ تعادل استراتژی غالب وجود نداشته باشد، باید به ایده‌ی تعادل نش برگردیم. اما به طور نمونه (معمولاً) بیش از یک تعادل نش وجود خواهد داشت. پس مسئله ما تلاش برای حذف برخی از تعادل‌های غیرمنطقی نش است.

اعتقاد منطقی و معقول درباره‌ی رفتار بازیکنان این است که برای آنها غیرمنطقی خواهد بود استراتژی‌هایی را بازی کنند که بوسیله استراتژی‌های دیگر غالب شده‌اند. این نشان می‌دهد وقتی بازی مفروضی وجود داشته باشد، باید ابتدا تمام استراتژی‌های غالب را حذف کنیم و سپس تعادل نش بازی باقیمانده را محاسبه کنیم. این روش، حذف استراتژی‌های غالب نامیده می‌شود. و گاهی اوقات به کاهش قلیل توجهی در تعداد تعادل‌های نش منجر می‌گردد.

برای مثال بازی مشخص شده در جدول ۵-۵ را در نظر بگیرید توجه کنید دو استراتژی خالص تعادل نش وجود دارد، (بالا، چپ) و (پائین، راست). به هر حال، برای بازیکن B هیچ وقت استراتژی غالبش را بازی نخواهد کرد، تنها تعادل بازی، (پائین، راست) است.

حذف استراتژی‌های اکیداً غالب به طور کلی به عنوان روشی قابل قبول برای ساده کردن تجزیه و تحلیل (آنالیز) یک بازی پذیرفته می‌شود. حذف استراتژی‌های به طور ضعیف غالب، پیچیده‌تر است. مثال‌هایی وجود دارد که در آنها حذف استراتژی‌های به طور ضعیف غالب، ماهیت استراتژیک بازی را به طور معنی‌داری تغییر می‌دهند.

| بازیکن A | بازیکن B | |
|----------|----------|-------|
| | چپ | راست |
| بالا | (۲و۲) | (۰و۲) |
| پایین | (۲و۰) | (۱و۱) |

بازی با استراتژی‌های غالب

بازی‌های متوالی و تعادل کامل بازی فرعی: (یا بازی فرعی کامل):

بازی‌های توصیف شده تاکنون در فصل حاضر، همگی ساختار پویای خیلی ساده‌ای داشتند: آن‌ها یا بازی‌های یک مرحله‌ای و یا دنباله (رشته‌ای) تکراری از بازی‌های یک مرحله‌ای بودند. آن‌ها همچنین ساختار اطلاعات خیلی ساده‌ای داشتند: هر بازیکن پرداخت‌های بازیکن دیگر و استراتژی‌های موجود را می‌دانست، اما انتخاب واقعی بازیکن دیگر از استراتژی‌ها را از قبل نمی‌دانست. روش دیگر برای گفتن این مطلب این است که تا به حال توجه خودمان را به بازی‌های با حرکت همزمان محدود کردیم.

اما اکثر بازی‌های جالب توجه فاقد این ساختار هستند. در بسیاری از موقعیت‌ها، دست کم برخی از انتخاب‌ها به طور پی در پی (متوالی) صورت می‌گیرد و یک بازیکن ممکن

است انتخاب بازیکن دیگر را بدلند قبل از این که او مجبور باشد انتخاب خودش را بسازد. تجزیه و تحلیل چنین بازی‌هایی اهمیت قابل ملاحظه‌ای برای اقتصاددانان دارد چون بسیاری از بازی‌های اقتصادی چنین ساختاری دارند: یک انحصارگر رفتار تقاضای مصرف کننده را قبل از تولید محصول (ستاده) مشاهده می‌کند، یا انحصارگر دوجانبه ممکن است سرمایه‌گذاری رقیبش را قبل از اتخاذ تصمیمات محصول خودش مشاهده کند و غیره. تجزیه و تحلیل این گونه بازی‌ها مستلزم مفاهیم جدیدی است.

برای مثال، بازی ساده‌ی نشان داده شده در جدول ۶-۵ را در نظر بگیرید. به راحتی مشخص می‌شود که دو استراتژی خالص تعادل نش در این بازی وجود دارد، (بالا، چپ) و (پائین، راست).

نکته ضمنی (تلویحی) در توصیف این بازی، ایده‌ای است که هر دو بازیکن انتخاب‌هایشان را به طور همزمان بدون آگاهی از انتخابی که بازیکن دیگر کرده است، انجام می‌دهند. اما فرض کنید ما بازی‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن شخص A (سطر) باید نخست انتخاب کند و شخص B (ستون) انتخابش را بعد از مشاهده‌ی رفتار شخص A (سطر) انجام دهد.

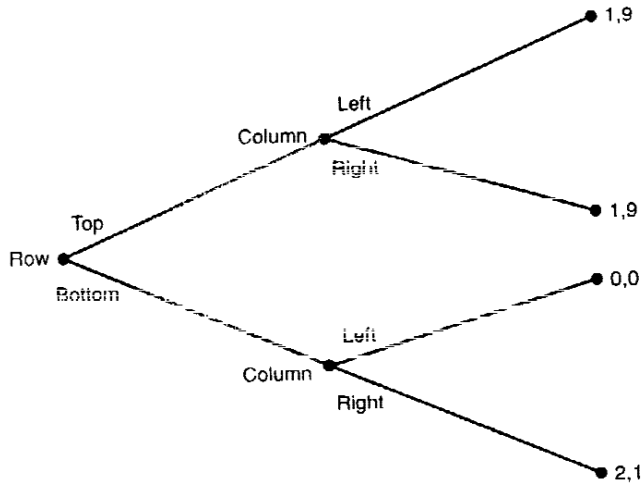
| | | بازیکن B (ستون) | |
|-------------------|-------|-----------------|-------|
| | | چپ | راست |
| بازیکن A (سطر) | بالا | (۱و۹) | (۱و۹) |
| | پائین | (۰و۰) | (۲و۱) |

جدول ۶-۵: ماتریس پرداخت یک بازی با حرکت همزمان

به منظور توصیف این بازی متوالی، لازم است ابزار جدیدی به نام درخت بازی معرفی شود. این درخت بازی نموداری است که نشانگر انتخاب‌هایی است که هر بازیکن می‌تولند در هر لحظه از زمان انجام دهد. پرداخت به هر بازیکن در شاخه‌های درخت مطابق شکل (۱) نشان داده شده است. این درخت بازی بخشی توصیفی از بازی در شکل گسترده است.

مطلب مهم در مورد نمودار درختی بازی این است که این نمودار ساختار پویای بازی را نشان می‌دهد - این که برخی انتخاب‌ها قبل از انتخاب‌های دیگر صورت گرفته‌اند. انتخاب در بازی مشابه انتخاب یک شاخه از درخت است. همین که انتخابی صورت گرفت، از آن به بعد بازیکنان در یک بازی فرعی مرکب از استراتژی‌ها و پرداخت‌های در دسترس برای آنها هستند.

محاسبه تعادل نش در هر یک از بازی‌های فرعی ممکن به ویژه در این حالت ساده و آسان است، چون مثال خیلی راحت است. اگر شخص **A** (سطر) بالا را انتخاب کند، او به طور مؤثری بازی فرعی خیلی ساده‌ای را انتخاب می‌کند که در آن شخص **B** (ستون) فقط یک حرکت باقی مانده دارد. شخص **B** (ستون) بین دو حرکتش بی‌تفاوت است به طوری که اگر بازیکن **A** (سطر) بالا را انتخاب کند، قطعاً با پرداخت ۱ بازی را به اتمام می‌رساند.



شکل (۱): درخت بازی. هنگامی که نخست شخص A (سطر) حرکت می‌کند، درخت بازی پرداخت‌هایی را برای بازی قبل مشخص می‌کند.

اگر شخص A (سطر) پائین را انتخاب کند، برای شخص B (ستون) انتخاب راست بهینه خواهد بود که پرداخت ۲ را به شخص A می‌دهد. چون ۲ بزرگتر از ۱ است، شخص A به وضوح با انتخاب پائین به جای بالا وضعیتش بهتر می‌شود. بنابراین، تعادل منطقی و مناسب برای این بازی (پائین، راست) است. البته، این یک تعادل نش در بازی حرکت همزمان است. اگر شخص B (ستون) ابراز (اعلام) کند که راست را انتخاب خواهد کرد، آنگاه پاسخ بهینه‌ی شخص A پائین است و اگر شخص A ابراز کند که پائین را انتخاب خواهد کرد، آنگاه پاسخ بهینه‌ی شخص B راست است.

اما برای تعادل دیگر (بالا، چپ) چه اتفاقی می‌افتد؟ اگر شخص A معتقد باشد که شخص B چپ را انتخاب خواهد کرد، آنگاه حتماً انتخاب بهینه‌ی او انتخاب بالا است. اما چرا شخص A معتقد است که شخص B واقعاً چپ را انتخاب خواهد کرد؟ وقتی که شخص A پائین را انتخاب می‌کند، انتخاب حاصل از بازی فرعی برای شخص B،

انتخاب راست است. انتخاب چپ در این مرحله، یک انتخاب تعادلی در بازی فرعی مربوطه نیست.

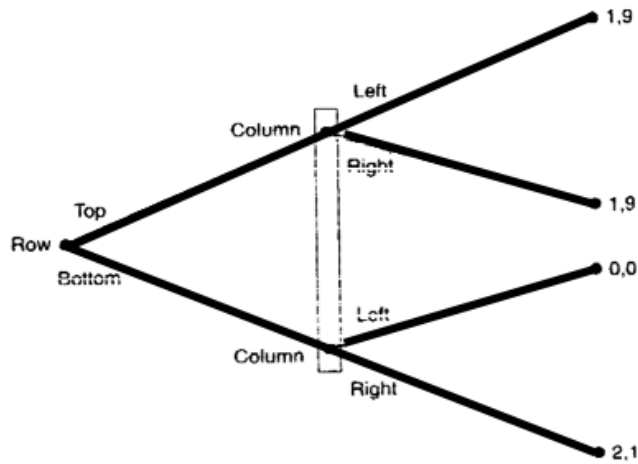
در این مثال، تنها یکی از دو تعادل نش شرطی را برقرار می‌سازند که نه تنها تعادلی کلی وجود دارد بلکه همچنین تعادلی در هر بازی فرعی وجود خواهد داشت. تعادل نش با این ویژگی به عنوان تعادل بازی فرعی کامل معروف است.

تعادل بازی فرعی کامل، حداقل در بین بازی‌هایی که تاکنون بررسی کرده‌ایم، به سادگی محاسبه می‌شود. شخص می‌تواند به سادگی قیاس قهقرایی را با شروع از حرکت آخر بازی انجام دهد. بازیکنی که آخر حرکت می‌کند، با یک مسئله‌ی بهینه‌سازی ساده بدون انشعاب استراتژیک مواجه است، بنابراین حل این مسئله خیلی آسان است. بازیکنی که حرکت ماقبل آخر را انجام می‌دهد، می‌تواند پیش‌بینی کند (تصمیم بگیرد) چگونه بازیکنی که در حرکت آخر است به انتخاب‌هایش واکنش نشان خواهد داد و غیره. روش تجزیه و تحلیل مشابه برنامه‌ریزی پویا است. همین که بازی از طریق این قیاس قهقرایی درک شده باشد، بازیکنان آن را از پیش بازی می‌کنند.

همچنین شکل گسترده بازی مدلسازی موقعیت‌هایی که در آنجا برخی حرکت‌ها متوالی و برخی همزمان هستند را امکانپذیر می‌سازد. مفهوم ضروری آن "مجموعه‌ی اطلاعات" است. مجموعه اطلاعات یک فرد یا بنگاه مجموعه‌ی گره‌های درخت است که فرد یا بنگاه نمی‌تواند آنها را تفکیک کند. برای مثال، بازی حرکت همزمان نشان داده شده در آغاز این بخش بوسیله‌ی درخت بازی شکل ۲-۵ نشان داده می‌شود. در این نمودار، ناحیه سایه‌دار بیانگر این است که شخص **B** نمی‌تواند تمایز قائل شود کدام یک از این تصمیمات توسط شخص **A** در زمانی که شخص **B** باید تصمیم خودش را بگیرد، اتخاذ

شد. از این رو، درست (دقیقاً) همانند وقتی است که انتخاب‌ها به طور همزمان ساخته شوند.

شکل ۲-۵: مجموعه‌ی اطلاعات. این شکل گسترده برای بازی حرکت همزمان اولیه است.



مجموعه‌ی اطلاعات سایه‌دار نشان می‌دهند که شخص **B** هنگام تصمیم‌گیری از انتخاب شخص **A** آگاه نیست.

بنابراین، شکل گسترده‌ی یک بازی برای مدلسازی هر چیزی در شکل استراتژیک به علاوه‌ی اطلاعاتی در مورد رشته‌ای از انتخاب‌ها و مجموعه اطلاعات به کار می‌رود. در این حال، شکل گسترده مفهوم مؤثرتری (قوی‌تر) نسبت به شکل استراتژیک دارد، چون

شامل اطلاعات مفصل و کامل تر درباره‌ی عکس‌العمل استراتژیک عوامل (افراد یا بنگاه‌ها) است. وجود این اطلاعات اضافی است که به حذف برخی از تعادل‌های نش غیرمنطقی کمک می‌کند.

مثال: یک مدل چانه‌زنی ساده:

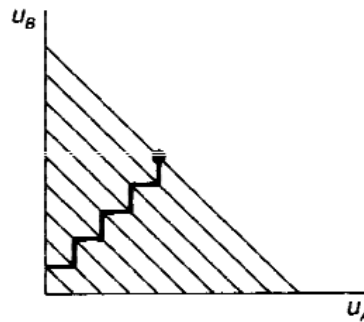
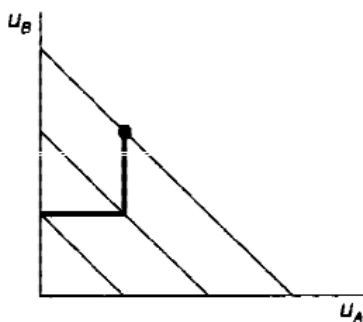
فرض کنید ۱ دلار برای تقسیم بین دو بازیکن A و B وجود دارد. آنها توافق می‌کنند حداکثر سه روز برای مذاکره درباره‌ی تقسیم یک دلار وقت بگذارند. روز اول، A پیشنهادی ارائه خواهد کرد، B یا می‌پذیرد و یا پیشنهاد متقابلی در روز بعد می‌دهد و روز سوم A پیشنهاد نهایی را ارائه خواهد کرد. اگر آنها نتوانند به توافقی در سه روز دست یابند، هر دو بازیکن چیزی به دست نمی‌آورند.

درجه (میزان) بی‌صبری A و B متفاوت است. A پرداختها را در آینده به میزان α در هر روز و B پرداخت را به میزان β در هر روز تنزیل می‌کند. در نهایت، فرض می‌کنیم اگر بازیکنی بین دو پیشنهاد مردد است، او یکی از پیشنهادهایی را که بیشتر توسط رقیبش ترجیح داده شده خواهد پذیرفت. این ایده‌ای است که رقیب توانسته مقدار کوچکی دلخواهی را پیشنهاد کرده تا بازیکن را به گونه‌ای وادار کند که به طور اکید یک انتخاب را ترجیح دهد. و این فرض به ما اجازه می‌دهد چنین "مقدار کوچک دلخواهی" را به صفر تقریب زنیم. اثبات می‌شود که تعادل بازی فرعی کامل منحصر بفردی از این بازی چانه‌زنی وجود دارد.

همان طور که در بالا پیشنهاد شد، ما تجزیه و تحلیل خود را در پایان بازی درست قبل از روز آخر، شروع می‌کنیم. در این نقطه A می‌تواند پیشنهادی مبنی بر پذیرش یا رد به B

ارائه کند (پیشنهاد همه یا هیچ). بوضوح، در این نقطه کار مطلوب و بهینه برای A این است که به بازیکن B کوچکترین مقدار ممکن را که او خواهد پذیرفت پیشنهاد کند و این بنا به فرض صفر است. بنابراین اگر بازی واقعاً سه روز طول بکشد، بازیکن A یک دلار به دست خواهد آورد و بازیکن B هیچی به دست نخواهد آورد (یعنی، مقدار کوچک دلخواهی).

حال به حرکت قبلی برمی‌گردیم، وقتی B پیشنهاد تقسیم یک دلار را می‌دهد. در تاین نقطه B باید دریابد که A می‌تواند ۱ دلار را در حرکت بعدی با رد پیشنهاد B برای خودش تضمین کند. ارزش یک دلار دوره‌ی بعد برای بازیکن A در این دوره، به مقدار α است، بنابراین هر پیشنهادی کمتر از α قطعاً رد خواهد شد. بازیکن B مطمئناً حالا $1-\alpha$ را به دست خواهد آورد. حال به روز اول برمی‌گردیم. در این نقطه، A وادار به ارائه پیشنهاد شده و درمی‌یابد که B می‌تواند $1-\alpha$ را به دست آورد اگر او تا روز دوم منتظر بماند. از این رو A باید به منظور جلوگیری از تأخیر B ، پیشنهاد پرداختی بدهد که دست کم این ارزش فعلی را برای B داشته باشد. بنابراین او $\beta(1-\alpha)$ را به B پیشنهاد خواهد کرد. B متوجه می‌شود این پیشنهاد قابل قبول است و بازی به پایان می‌رسد. پیامد نهایی این است که بازی در حرکت اول با دریافتی A به مقدار $1-\beta(1-\alpha)$ و دریافتی B به مقدار $\beta(1-\alpha)$ ، به پایان می‌رسد.



شکل (۳): یک بازی چانه‌زنی. خط تیره پیامدهای تعادلی در بازی‌های فرعی را به همدیگر وصل می‌کند. نقطه روی بالاترین خط، تعادل بازی فرعی کامل است.

شکل (۳) این فرایند را برای حالتی که در آن $\alpha = \beta < 1$ است نشان می‌دهد. دورترین خط قطری (مورب) الگوهای ممکن پرداخت در روز اول را نشان می‌دهد، یعنی تمام پرداخت‌های به شکل $x_A + x_B = 1$ را. خط مورب بعدی که به طرف مبدأ حرکت می‌کند، ارزش فعلی پرداخت‌هایی را نشان می‌دهد اگر بازی در دوره‌ی دوم به پایان برسد: $x_A + x_B = \alpha$.

نزدیکترین خط مورب به مبدأ ارزش فعلی پرداخت‌ها را نشان می‌دهد، اگر بازی در دوره‌ی سوم به پایان برسد. معادله‌ی این خط نیز $x_A + x_B = \alpha^2$ است. مسیر راست گوشه (زاویه‌ی راست)، حداقل تقسیم‌های قابل قبول هر دوره را با رسیدن به تعادل کامل بازی فرعی نهایی نشان می‌دهد.

نمودار ۳-۵ (ب) چگونگی فرایندهای مشابهی را با مراحل بیشتری در مذاکره نشان می‌دهد.

طبیعی است که افق زمانی را به سوی نامحدود (بی‌نهایت) سوق داده و بپرسیم در بازی نامحدود چه اتفاقی می‌افتد. ثابت می‌شود که تقسیم تعادلی بازی فرعی کامل عبارت است از:

$$\text{پرداخت به } A = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} \text{ و پرداخت به } B = \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta}$$

توجه کنید اگر $\alpha = 1$ و $\beta < 1$ باشد، آنگاه بازیکن A پرداخت کاملی را دریافت می‌کند، و این مقدار منطبق با اصل بیان شده در گاسپل (Gospels) است: "با صبر کردن کار کاملی (بازی فرعی) برای او وجود دارد." (James ۴:۱)

بازی‌های تکراری و تکمیل بازی فرعی:

لیده‌ی تکمیل بازی فرعی که تعادل نش را حذف می‌کند مستلزم فعالیت‌های پرخطر و بی‌ارزشی برای بازیکنان است یعنی، انجام آنها به نفع بازیکنان نیست. برای مثال، استراتژی مجازات شرح داده شده در قبل، تعادل کامل یک بازی فرعی نیست. اگر یک بازیکن (فرد مجرم) واقعاً از مسیر (همکاری، همکاری) منصرف شود، لزوماً به مصلحت بازیکن (مجرم) دیگر نیست که در واکنش به او واقعاً همیشه جرم را انکار کند. شاید تنبیه بازیکن دیگر به دلیل انکار تا حدی منطقی به نظر برسد ولی تنبیه همیشه افراطی‌ترین حد به نظر می‌رسد.

گاهی اوقات استراتژی کمتر ناهنجار به عنوان استراتژی مقابله به مثل (Tit-for-ti,t) معروف است. در بازی اول اقدام به همکاری کرده و در بازی‌های بعدی هر چه که رقیب شما در بازی قبلی انجام داده، انجام دهید. رد این استراتژی، بازیکن به خاطر انکار تنبیه می‌شود، ولی فقط یک بار تنبیه می‌شود. در این مفهوم، استراتژی مقابله به مثل، استراتژی بخشش است.

اگرچه استراتژی مجازات بازی فرعی کاملی برای معمای زندانی تکراری نیست، ولی استراتژی‌هایی وجود دارد که راه‌حل همکاری را بازی فرعی کامل می‌دانند. توصیف این استراتژی‌ها آسان نیست اما ویژگی و مشخصه کد نقطه متمایز کننده (west point honor code) دارند: هر بازیکن موافقت می‌کند دیگری را به خاطر انکار

تنبيه كند و همچنين ديگرى به خاطر قصور (كوتاهى) در تنبيه بازيكن ديگر به خاطر انكار تنبيه شود و غيره. اين حقيقت كه اگر انكار كننده را تنبيه نكنيد شما تنبيه خواهيد شد همان چيزى است كه آن را بازي فرعى كاملى براى انجام مجازات خواهد ساخت.

متأسفانه، نوع مشابهى از استراتژى‌ها مى‌توانند بسيارى از پيامدهاى ديگر در معماى زندانى تكرارى را تأييد كنند. قضيه‌ى فلبك بيان مى‌كند كه اصولاً تمام توزيع‌هاى مطلوبيت در يك بازي يك مرحله‌اى تكرارى مى‌توانند تعادلى از بازي تكرارى باشند.

اين عرضه‌ى اضافى تعادل، مشكل آفرين است. به طور كلى، بزرگتر بودن فضاي استراتژى باعث بيشتتر شدن تعادل‌ها خواهد شد، چون روش‌هاى بيشتري براى بازيكنان، براى مقابله به مثل تهديدآمیز به علت انكار نشى از مجموعه‌ى معينى از استراتژى‌ها وجود خواهد داشت. به منظور حذف تعادل نامطلوب، بايد معيارى را براى حذف استراتژى‌ها پيدا كنيم. يك معيار طبيعى حذف استراتژى‌هاى است كه بيش از حد پيچيده‌اند (يعنى بيش از حد پيچيده بودن آنها يك معيار به شمار مى‌رود). اگرچه پيشرفت‌هاى در اين راستا صورت گرفته است، ولى ايده پيچيدگى مهم بوده و ارائه تعريفى كاملاً رضايتمند بخش دشوار است.

بازى‌هاى با اطلاعات ناقص:

تعادل نش - بيزى:

تاكنون بازي‌هاى با اطلاعات كامل را بررسى كرديم. بويژه، هر عامل اقتصادى (بازيكن) فرض كرده بود كه پرداخت‌هاى بازيكنان ديگر را مى‌دلند و هر بازيكن مى‌دلند كه عامل اقتصادى (بازيكن) ديگر اين را مى‌داند و غيره. در اكثر موقعيت‌ها، اين فرض مناسبى نيست. اگر عاملى پرداخت عامل اقتصادى ديگر را نداند آنگاه تعادل نش هيچ معنايى

ندارد (بوجود نخواهد آمد). به هر حال، روش بررسی بازی‌های با اطلاعات ناقص از هارمونی (Harsanyi) وجود دارد که تجزیه و تحلیل سیستماتیک ویژگی‌هایشان را امکان‌پذیر می‌سازد.

کلید روش هارسانی، رده‌بندی تمام نااطمینانی‌هایی است که یک عامل اقتصادی ممکن است درباره‌ی دیگری داشته باشد و وارد کردن آن در متغیری معروف به نمونه‌ی تیپ عامل اقتصادی است برای مثال، یک عامل اقتصادی ممکن است درباره‌ی قیمت (ارزش) گذاری بنگاه دیگر از کالایی و یا درباره‌ی ریسک‌گریز بودن او و غیره اطمینان نداشته باشد. هر تیپ بازیکن به مثابه‌ی بازیکنی متفاوت در نظر گرفته شده و هر عامل اقتصادی توزیع احتمال پیشین منحنی روی نمونه تیپ‌های متفاوتی از عاملین اقتصادی دارد.

یک تعادل نش - بیزی این بازی، مجموعه‌ای از استراتژی‌ها برای هر تیپ بازیکن است که ارزش انتظاری هر نمونه بازیکن را با معلوم بودن استراتژی‌های تعقیب شده توسط سایر بازیکنان، حداکثر می‌کند. این تعریف اساساً همانند تعریف تعادل نش به استثنای نااطمینانی اضافی درباره‌ی تیپ بازیکن دیگر، است. هر بازیکن می‌داند که بازیکن دیگر از مجموعه‌ای از نمونه تیپ‌های ممکن انتخاب می‌شود، ولی دقیقاً نمی‌داند که کدام یک را او بازی می‌کند. به خاطر داشته باشید به منظور توصیف کاملی از یک تعادل، باید فهرستی از استراتژی‌ها را برای نمونه تیپ‌های بازیکنان داشته باشیم، نه فقط نمونه تیپ‌های واقعی در موقعیتی خاص، چون هر بازیکن فردی نمونه تیپ‌های واقعی بازیکنان دیگر را نمی‌داند و باید تمام احتمالات را در نظر بگیرد.

در یک بازی با حرکت همزمان، این تعریف تعادل مناسب است. در بازی متوالی منطقی است به بازیکنان دیگر امکان دهیم اعتقاداتشان درباره‌ی نمونه تیپ‌های بازیکنان دیگر را بر اساس فعالیت‌هایی که آنها مشاهده کرده‌اند بروز سازند. معمولاً فرض می‌کنیم که این

به روز رسانی به روشی سازگار با قانون بیز انجام می‌شود. بنابراین، اگر بازیکنی انتخاب دیگری از یک استراتژی S را مشاهده کند، بازیکن اول باید اعتقادش را درباره‌ی آنچه که تیپ بازیکن دیگر دارد، بوسیله‌ی تعیین این که چگونه احتمالاً آن S توسط تیپ‌های گوناگونی انتخاب خواهد شد، اصلاح کند.

مثال: (مزایده‌ی پیشنهادی مهر و موم شده):

مزایده‌ی پیشنهادی مهر و موم شده‌ی ساده‌ای را در نظر بگیرید که در آن برای هر ایتِم (قلم کالا) دو پیشنهاد دهنده وجود دارد. هر بازیکن پیشنهاد مستقلی را بدون داشتن پیشنهاد بازیکن دیگر ارائه کرده و کالا با بالاترین پیشنهاد به شخص اعطا خواهد شد. هر پیشنهاد دهنده ارزش (قیمت گذاری) خودش را از کالایی که مزایده می‌شود، V ، می‌داند اما ارزش گذاری دیگری را نمی‌داند. به هر حال، هر بازیکن معتقد است که ارزش گذاری شخص دیگر از کالا به طور یکنواخت بین صفر و یک توزیع شده است. (و هر شخص می‌داند که هر شخص دیگر به این معتقد است و غیره).

در این بازی، نمونه تیپ بازیکن در واقع ارزش گذاریش است. بنابراین، تعادل نش – بیز برای این بازی، یک تابع، $b(U)$ خواهد بود که پیشنهاد بهینه‌ی، b ، را برای بازیکنی از تیپ، U ، نشان می‌دهد. با مفروض بودن ماهیت قرینگی بازی، ما تعادلی را جستجو می‌کنیم که در آن هر بازیکن استراتژی یکسانی را اختیار می‌کند.

به طور طبیعی حدس زده می‌شود که تابع $b(U)$ تابعی اکیداً صعودی است، یعنی، ارزش گذاری‌های بالاتر منجر به پیشنهادها بالاتر می‌شود. بنابراین، می‌توانیم $V(b)$ را تابع معکوسش قرار دهیم به طوری که $V(b)$ ارزش گذاری هر شخصی که b را پیشنهاد می‌کند، به ما می‌دهد. وقتی که بازیکنی پیشنهاد خاص b را ارائه می‌کند، احتمال بردش،

احتمالی است که پیشنهاد بازیکن دیگر کمتر از b باشد. اما این به زبان ساده احتمالی است که ارزش‌گذاری بازیکن دیگر کمتر از $V(b)$ است. از آنجا که V به طور یکنواخت بین 0 و 1 توزیع شده است، احتمال این که ارزش‌گذاری بازیکن دیگر کمتر از $V(b)$ باشد، $V(b)$ است.

بنابراین، اگر بازیکنی b را پیشنهاد دهد وقتی که ارزش‌گذاری اش V است، پرداخت انتظاری اش عبارت است از:

$$(v-b)V(b) + 0[1-V(b)]$$

عبارت (جمله) نخست مازاد انتظاری مصرف‌کننده است اگر او بالاترین پیشنهاد را داده باشد. عبارت دوم مازاد صفری است که او دریافت می‌کند، اگر او پیشنهاد بیشتری بدهد پیشنهاد بهینه باید این عبارت را حداکثر کند، بنابراین:

$$(V-b)V'(b) - v(b) = 0$$

در هر مقداری از V ، این معادله پیشنهاد بهینه برای بازیکن را به صورت تابعی از V تعیین می‌کند. از آنجا که $V(b)$ بنا به فرض تابعی است که رابطه‌ی بین پیشنهاد بهینه و ارزش‌گذاری را بیان می‌کند، باید داشته باشیم:

$$(V(b)-b)V'(b) \equiv V(b)$$

برای تمام b ها

$$V(b) = b + \sqrt{b^2 + 2c}$$

جواب این معادله‌ی دیفرانسیل عبارت است از:

C ثابت انتگرال‌گیری است. به منظور تعیین این ثابت انتگرال‌گیری، باید توجه داشته باشیم وقتی $V=0$ است، باید b نیز مساوی صفر باشد، چون وقتی ارزش‌گذاری صفر

باشد، باید پیشنهاد بهینه نیز صفر باشد. با جای گذاری این در جواب معادله‌ی دیفرانسیل

$$0 = 0 + \sqrt{2C}$$

و این بیانگر صفر بودن C ($C=0$) است. از آن نتیجه گرفته می‌شود که $V(b)=2b$ یا

$$b = \frac{7}{2}$$

بازیکن، نصف پیشنهاد ارزش گذاری اش است.

روشی که به جواب این بازی دست یافتیم کاملاً منطقی و استاندارد است. اصولاً، ما حدس زدیم که تابع پیشنهادی بهینه معکوس پذیر بوده و سپس معادله‌ی دیفرانسیلی را که باید برقرار باشد به دست آوردیم. همان طوری که به نتیجه‌ی مطلوب رسید، تابع پیشنهادی حاصل ویژگی مطلوبی دارد. یکی از نقاط ضعف این روش این است که تنها یک تعادل ویژه را برای بازی بیزی نشان می‌دهد ولی در اصل تعادل‌های بسیار دیگری می‌تواند داشته باشد.

همان طوری که نشان داده شد، در این بازی خاص، جوابی که محاسبه کردیم منحصر بفرد است، اما این در حالت کلی اتفاق نمی‌افتد. به ویژه، در بازی‌های با اطلاعات ناقص ممکن است برخی بازیکنان سعی در مخفی کردن نمونه حقیقی‌شان داشته باشند. برای مثال، یک نمونه تیپ ممکن است سعی کند استراتژی مشابه با تیپ دیگر را بازی کند. در این حالت، تابع ارتباط‌دهنده‌ی نمونه تیپ به استراتژی معکوس‌پذیر نبوده و تجزیه و تحلیل خیلی پیچیده‌تر می‌شود.

بحث تعادل نش بیز:

ایده‌ی تعادل نش - بیز یک نظریه‌ی ابتکاری است مشکل این است که استدلال مطرح شده در محاسبه‌ی تعادل نش - بیز معمولاً خیلی پیچیده است. گرچه شاید غیرمنطقی نباشد که فقط بازیکنان کاملاً عقلایی بر طبق نظریه نش - بیز بازی خواهند کرد، ولی تردید قابل ملاحظه‌ای درباره‌ی این که آیا فقط بازیکنان واقعی قادر به انجام محاسبات ضروری هستند، وجود دارد.

به علاوه، مشکلی در رابطه با پیشگویی‌های مدل وجود دارد. انتخابی که هر بازیکن می‌کند به طور قطع به اعتقاداتش درباره‌ی توزیع نمونه تیپ‌های گوناگون در جامعه بستگی دارد. اعتقادهای متفاوت درباره‌ی فراوانی، نمونه تیپ متفاوت به رفتار بهینه‌ی منجر می‌شود. از آنجا که ما به طور کلی اعتقادات بازیکنان درباره‌ی رواج نمونه تیپ‌های گوناگون بازیکنان را مشاهده نمی‌کنیم، ما به طور شاخص قادر به بررسی پیشگویی‌های مدل نخواهیم بود. لیارد (۱۹۸۶) نشان داده است که اصولاً هر الگوی بازی، یک تعادل نش بیز برای الگوی اعتقادات است.

تعادل نش، در فرمول اولیه‌اش، شرایط سازگاری را روی اعتقادات عاملین اقتصادی قرار می‌دهد - تنها آن اعتقادهای سازگار با رفتار حداکثر کردن مورد قبول هستند. اما بزودی اجازه می‌دهیم چند نمونه تیپ از بازیکنان با توابع مطلوبیت متفاوت وجود داشته باشند، این ایده قدرت و تأثیر چندانی ندارد. تقریباً هر الگوی رفتاری می‌توان با برخی الگوهای اعتقادی سازگار باشد.

فهرست منابع**فهرست منابع**

- Julmi, Christian. (2012). Introduction to Game Theory. Bookboon.com.
- Naser, Sylvia (1994): A Beautiful Mind: A Biography of John Forbes Nash, Jr., Winner of the Nobel Prize in Economics, Simon & Schuster, London.
- Nash, John (1950). "Equilibrium points in n-person games", Proceedings of the National Academy of the USA 36(1).
- Osborne, Martin J. (2004). An Introduction to Game Theory, Oxford University Press, New York
- Osborne, Martin J. and Ariel Rubinstein (1994): A Course in Game Theory, MIT Press. Chicago.
- Quine, W.v.O (1960), "Carnap and Logical Truth", Synthese 12 (4): 350–374.
- Quine, W.v.O (1967), "Truth by Convention", Philosophical Essays for A.N. Whitehead, Russel and Russel Publishers.
- Ranis G, Vreeland J R and Kosack S (eds): (2006) Globalization and the Nation State, Routledge Taylor and Francis Group, London and New York.
- Tian, G. (2000c), Implementation of Balanced Linear Cost Share Equilibrium Solution in Nash and Strong Nash Equilibria," Journal of Public Economics, 76 (2000), 239-261.
- Tian, G. (2000d), Double Implementation of Linear Cost Share Equilibrium Allocations," Mathematical Social Sciences, 40 (2000), 175-189.
- Tian, G. and Q. Li (1995a), On Nash-Implementation in the Presence of Withholding," Games and Economic Behavior 9, 222-233.